

Images brouillées, images retrouvées

JEAN-PAUL DELAHAYE • PHILIPPE MATHIEU

La transformation du boulanger, du photomaton, et les charmes de l'arithmétique.

Le boulanger prend la pâte, l'étire, la replie, puis recommence. C'est la «transformation du boulanger» que les spécialistes du chaos utilisent depuis 20 ans pour expliquer les subtiles interactions entre l'ordre et la complexité, entre le déterminisme et le hasard. Par cette transformation, croit notre boulanger, les particules de pâte se mélangent, et sa pâte s'homogénéise. Est-ce certain ?

Notre projet ici sera modeste et ludique : nous allons utiliser la métaphore pâtissière pour maltraiter des images et observer quelques phénomènes étranges. La transformation du boulanger et celle que nous appellerons *la transformation du photomaton* nous feront assister en direct au brouillage progressif d'une image et à son «débrouillage» inattendu.

Un logiciel pour *Windows 95* réalisé à l'occasion de cet article est disponible. Les lecteurs pourront soit le demander à la revue (envoyer une disquette et une enveloppe timbrée pour le retour), soit le télécharger à partir du site Internet : <http://www.lifl.fr/~mathieu/transform>.

Le site contient des illustrations complémentaires et propose d'autres transformations avec lesquelles vous pourrez expérimenter en suivant les indications données dans cet article.

LES MÉLANGES BIJECTIFS DE PIXELS

Une image d'ordinateur est composée d'un nombre fini de points appelés pixels, qu'il est possible de traiter individuellement et donc de mélanger comme on

mélange des cartes à jouer (nous reviendrons sur ce parallèle).

Les mélanges de points les plus intéressants sont les mélanges bijectifs (appelés aussi permutations) : chaque point d'une image est envoyé à la place d'un autre point dans la transformée, et aucun point n'est perdu. Après un mélange bijectif, l'image est toujours présente (puisque aucun point n'a été effacé), mais elle est mélangée et parfois méconnaissable.

Le mélange bijectif ayant été effectué, on peut l'appliquer une deuxième fois, puis une troisième, etc. On obtient ainsi une série d'images complètes, mais où l'on éprouve des difficultés – en général croissantes – à reconnaître l'image de départ.

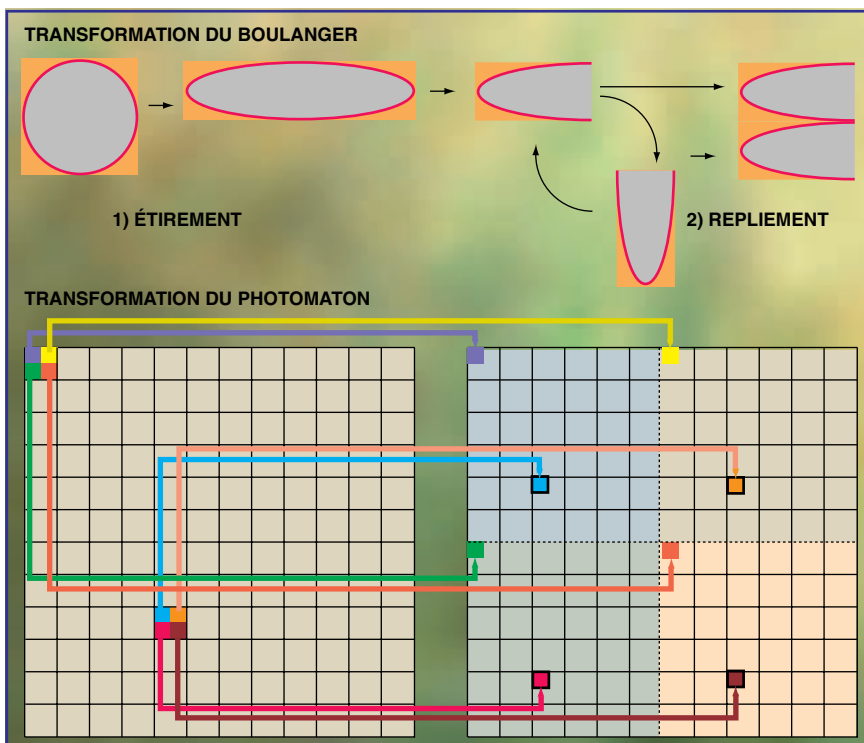
Avec des images composées d'un nombre fini de pixels (c'est toujours le cas en informatique), un miracle se produit : au bout d'un certain temps, l'image de départ réapparaît absolument identique. Ce temps de retour est parfois énorme, mais nous verrons comment le calculer.

Dans le cas continu – c'est-à-dire quand on considère une image comportant une infinité de points –, ce retour à l'ordre est exceptionnel. Cependant, pour certaines transformations, il se produit approximativement ce qui intéresse les théoriciens de l'ordre et du désordre. Le retour approximatif dans le cas continu n'est peut-être pas étonnant puisque, dans le cas fini, le retour exact est une règle absolue : quel que soit le mélange bijectif considéré, le retour au départ se produit.

Partons pour ce voyage d'image en image cadencé par les transformations bijectives qui nous feront observer de curieuses brusques réapparitions de l'ordre là où le chaos semble s'imposer.

LE BOULANGER DISCRET

Commençons par la transformation du boulanger. Nous partons d'une image de n lignes et m colonnes. Pour la couper en deux selon la hauteur et la largeur,



1. Le déplacement des points dans les transformations du boulanger et du photomaton.

nous supposons que n et m sont des nombres pairs.

Les points de la première ligne ont pour coordonnées :

$(0,0), (1,0), \dots, (m-2,0), (m-1,0)$.

Ceux de la deuxième ligne :

$(0,1), (1,1), \dots, (m-2,1), (m-1,1)$, etc.

Nous simulerons l'étirement de la pâte en interpénétrant les lignes paires et les lignes impaires :

la hauteur du rectangle de départ est ainsi divisée par deux et sa longueur multipliée par deux. Les deux lignes premières sont donc maintenant :

$(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), \dots, (m-2,0), (m-2,1), (m-1,0), (m-1,1)$

$(0,2), (0,3), (1,2), (1,3), \dots, (m-2,2), (m-2,3), (m-1,2), (m-1,3)$, etc.

Le repliement de la pâte consiste à couper le rectangle en deux et à placer la partie droite sous la partie gauche après l'avoir fait pivoter de 180 degrés.

Les points des premières lignes sont alors :

$(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), \dots, (m/2-1,0), (m/2-1,1)$

$(0,2), (0,3), (1,2), (1,3), \dots, (m/2-1,2), (m/2-1,3)$, etc.

et les points des dernières lignes résultant du repliement de la moitié droite :

$(m-1,3), (m-1,2), (m-2,3), (m-2,2), \dots, (m/2,3)(m/2,2)$,

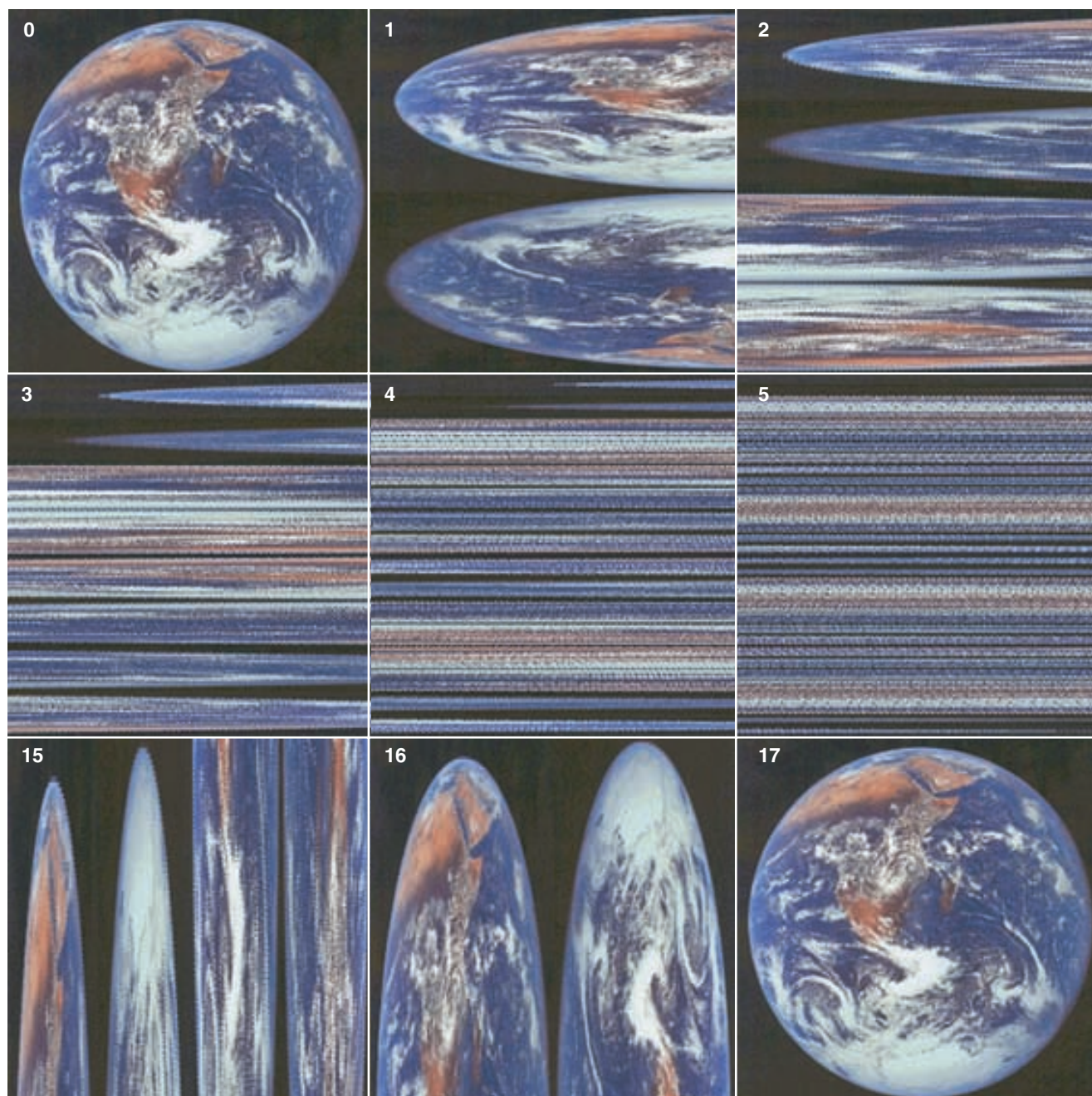
$(m-1,1), (m-1,0), (m-2,1), (m-2,0), \dots, (m/2,1)(m/2,0)$,

Bien sûr, tout cela n'est pas très difficile à programmer ; plus difficile, en revanche, est la mise au point d'une interface agréable.

Nous pouvons donc maintenant expérimenter. L'attente du retour peut être très longue (voir la figure 3).

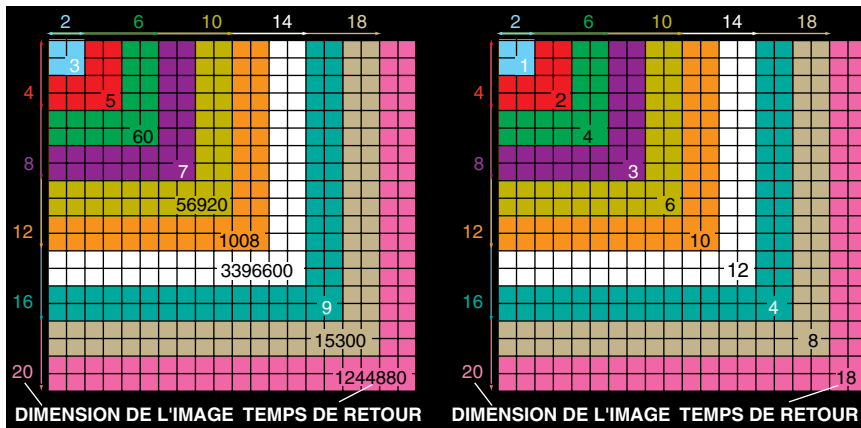
Pour simplifier dans ce tableau, nous ne nous sommes intéressés qu'aux images carrées de $2p$ lignes et $2p$ colonnes.

Nous ignorons s'il existe une loi générale simple donnant ce temps de retour.



2. Le retour en 17 étapes avec la transformation du boulanger. Neuf images obtenues par la transformation du boulanger à la Terre en format 256×256 . Le retour se fait après la dix-septième applica-

tion de la transformation. Les images représentées sont l'image initiale (numérotée 0), puis celles obtenues après 1, 2, 3, 4, 5, 15, 16 et 17 applications de la transformation du boulanger.



3. Les temps de retour (nombre de transformations redonnant l'état initial de l'image) sont indiqués dans les coins inférieurs droits des carrés représentant différentes dimensions d'image. À gauche, la transformation du boulanger ; à droite, la transformation du photomaton.

Nous avons simplement constaté que si $n = 2^p$ le temps de retour est $2p + 1$. Comme nous allons le voir avec la transformation du photomaton, ces déterminations du temps de retour sont parfois assez difficiles.

La figure 2 donne la série (partielle) des images qu'on obtient à partir de la Terre en format 256×256 . On remarquera un phénomène inattendu (sauf pour les spécialistes qui connaissaient le résultat) : l'image précédant le retour est le résultat de l'application d'une variante simple de la transformation du boulanger. Cette «transformation du boulanger inverse» consiste à étirer l'image – cette fois en un rectangle de largeur moitié et de hauteur double –, puis à replier le bas du rectangle en le faisant pivoter pour le placer à droite de la moitié du haut.

LE PHOTOMATON

La seconde transformation est encore plus surprenante. Elle montre que, dans un monde fini, en regardant de très loin une multitude de copies (approximatives) d'un objet donné, on le fait réapparaître. L'idée de cette transformation, qui nous l'a fait nommer photomaton, provient bien sûr de ces appareils qui vous délivrent quatre photographies d'identité semblables après que nous nous sommes assis dans une boîte bizarre qui nous a violemment éblouis.

Là encore, nous partons d'une image carrée ayant un nombre pair de lignes et de colonnes. Pour notre exposé, nous diviserons en quatre carrés l'image transformée, résultat de l'opération photomaton. Chaque groupe de quatre points

contigus constituant un petit carré est éclaté (voir la figure 1) ; chacun de ces points va dans un des quatre carrés et donne : (i) un point de l'image transformée dans le carré en haut à gauche ; (ii) un point dans le carré en haut à droite ; (iii) un point dans le carré en bas à gauche et (iv) un point en bas à gauche. Les nouveaux points sont placés dans les quatre carrés de la transformée, à l'endroit correspondant à celui dont provient le petit carré. Par exemple, les quatre points du coin en haut à droite :

$$(0, 0) (1, 0) \\ (0, 1) (1, 1)$$

vont respectivement occuper les places :

$$(0, 0) (n/2, 0) \\ (0, n/2) (n/2, n/2),$$

c'est-à-dire les quatre points en haut à droite des quatre quarts du carré. De même, les quatre points (juste à côté) :

$$(2, 0) (3, 0) \\ (2, 1) (3, 1)$$

vont respectivement occuper les places :

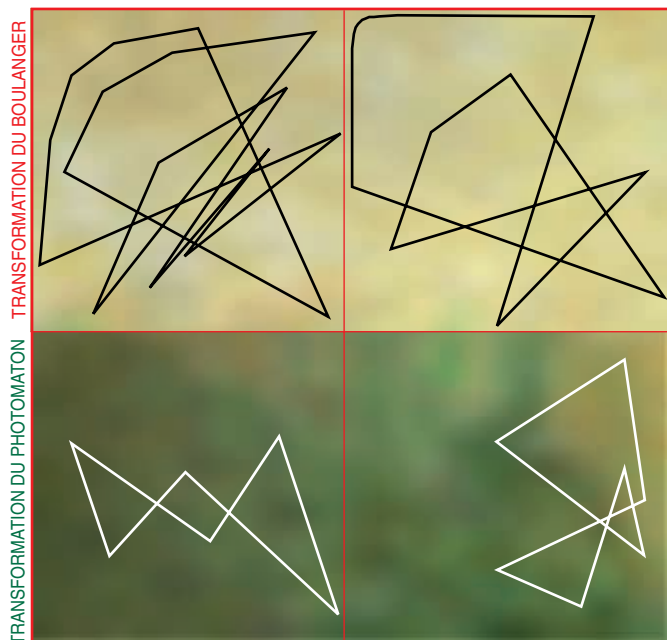
$$(1, 0) (n/2 + 1, 0) \\ (1, n/2) (n/2 + 1, n/2).$$

Le résultat des applications du photomaton, cette fois en partant d'un texte, (voir la figure 4) est, dans un premier temps, sans surprise : on assiste à une multiplication du texte que l'on obtient en quatre exemplaires, puis 16, puis 64, etc. Tout à coup, cependant, on retrouve l'image de départ. Ce phénomène se produit très rapidement. Pourquoi donc ?

L'image précédant le retour, là encore, mérite d'être examinée, car elle est parfaitement lisible : il s'agit de la superposition des quatre quarts de l'image qui ont



4. Le retour en 8 étapes avec la transformation du photomaton sur une image d'un texte de Verlaine, en format 256×256 .



5. Chaque point appartient à un cycle : il est en bonne place sur les images dont le numéro est un multiple de la longueur du cycle.

chacun été agrandis d'un facteur deux. L'image précédente, on le devine alors, est la superposition des 16 seizièmes du texte. Etc. Les temps de retour sont indiqués pour différentes tailles d'images sur la figure 3.

Dans le cas d'un temps de retour très long, ce qui est le cas avec l'image de la Joconde en format 252 × 212, les images intermédiaires sont parfois étranges et laissent entrevoir des réminiscences partielles et déformées de l'image initiale (voir la figure 6).

Le retour à l'ordre surprend, car on comprend mal qu'en mélangeant de plus en plus les points d'une image – ce qui en apparence la fractionne en morceaux déformés et battus –, on fasse revenir comme par magie l'image initiale. C'est que, dans les mondes où tout est discret, notre intuition fondée sur le continu nous fait défaut : un parallèle peut être proposé avec la mécanique quantique, où le passage à une conception quantique (la « mise en quanta » est une façon de discrétiser le monde physique) donne aussi une théorie dont bien des aspects contredisent les attentes de l'intuition.

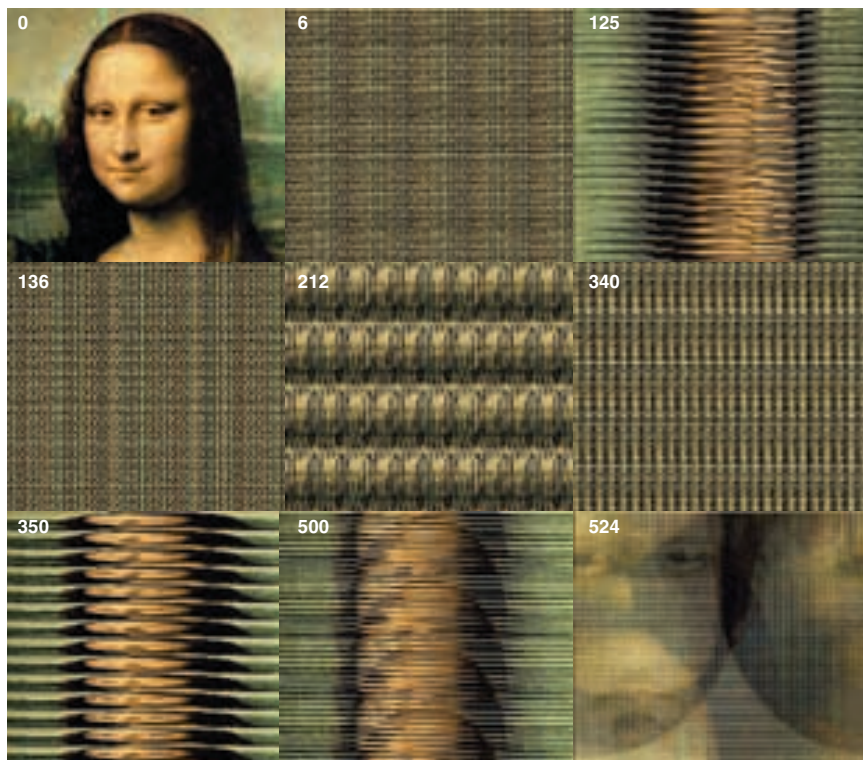
LE CALCUL DU TEMPS DE RETOUR

Contrairement à l'exemple précédent, nous avons réussi pour la transformation du photomaton à calculer le temps de retour.

La méthode qui nous a menés au résultat est indirecte. Lors de nos nombreux essais, nous avons pris les mélanges de cartes classiques et les avons appliqués aux lignes et aux colonnes d'une image. Dans le mélange de cartes le plus simple (appelé séparation binaire), nous faisons deux paquets à partir d'un en plaçant alternativement les cartes à droite et à gauche, puis nous regroupons les deux paquets en un seul, en mettant celui qui contient la première carte au-dessus (cette première carte reste donc à sa place).

Un peu de réflexion vous persuadera que la transformation qui consiste à effectuer simultanément la séparation binaire sur les numéros des colonnes et sur les numéros des lignes est identique à la transformation du photomaton.

Le mélange de cartes inverse de la séparation binaire est le mélange *out-faro* (ou *Pharaon out*) : on insère de façon parfaite les cartes du demi-paquet supérieur dans le demi-paquet inférieur, en s'arrangeant pour que la carte placée en tête y reste (si elle passait en second, il s'agirait de *in-faro*). Ce résultat sur l'inverse de la séparation binaire a été expliqué dans le numéro de *Pour la Science*



6. Transformation du photomaton appliquée à une image de la Joconde. L'image a une taille 252x212. Le temps de retour est de 1 050 étapes. Certaines images sont totalement illisibles, d'autres laissent apparaître le motif initial découpé et déformé. Les images retenues ont pour numéro : 0 (image initiale), 6, 125, 136, 212, 340, 350, 500, 524. Nous vous invitons à utiliser notre logiciel pour admirer la série complète des 1 050 étapes.

de mars 1997). Le mélange inverse de la transformation photomaton est donc nécessairement le résultat de l'*out-faro* appliqué aux lignes et aux colonnes, c'est-à-dire ce que nous avons observé : une superposition des quatre quarts agrandis de l'image (une petite réflexion supplémentaire vous en persuadera).

Cette compréhension de la nature profonde du photomaton (un mélange binaire simultané sur les colonnes et sur les lignes) nous conduit au temps de retour pour toutes les tailles d'images. Voici le raisonnement :

– D'une part, la période de l'*out-faro* (identique, puisque c'est la transformation inverse à celle du mélange binaire) est connue. Dans le cas particulier où n est égal à 2^i , c'est i . Dans le cas général pour $n = 2p$, le retour est le plus petit entier q tel que : $2^q - 1$ est divisible par $2p - 1$.

Prenons par exemple $p = 5$:

$2^1 - 1 = 1$ n'est pas divisible par 9 ;

$2^2 - 1 = 3$ n'est pas divisible par 9 ;

$2^3 - 1 = 7$ n'est pas divisible par 9 ;

$2^4 - 1 = 15$ n'est pas divisible par 9 ;

$2^5 - 1 = 31$ n'est pas divisible par 9 ;

$2^6 - 1 = 63$ est divisible par 9 ;

donc le temps de retour pour $p = 5$ (paquet de dix cartes) est 6.

Pour $p = 6$: on voit que $2^{10} - 1 = 1 023$ est divisible par 11 et qu'on n'obtient rien avant. Le temps de retour est 10.

– D'autre part, lorsqu'une transformation opère indépendamment sur les lignes et sur les colonnes, on montre que le temps de retour est le plus petit commun multiple du temps de retour de la transformation des colonnes et du temps de retour de la transformation des lignes.

Pour notre transformation du photomaton, il en résulte que, si le rectangle a pour taille $(2p) \times (2p)$, le temps de retour sera le plus petit commun multiple :

– du plus petit q tel que $2^q - 1$ est divisible par $2p - 1$

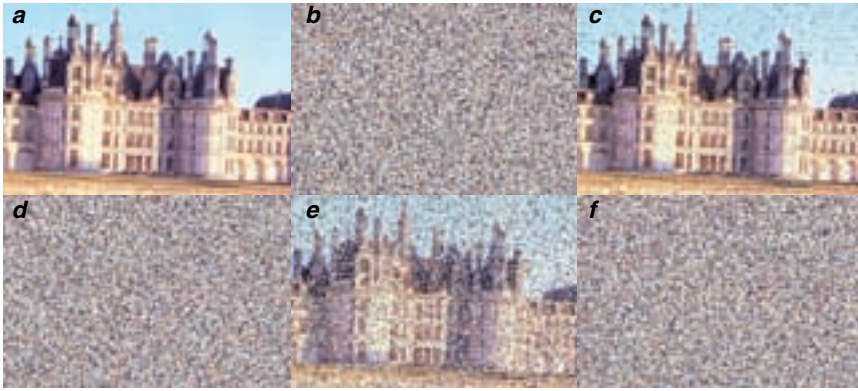
– et du plus petit q' tel que $2^{q'} - 1$ est divisible par $2p' - 1$.

C'est peut-être compliqué, mais nous n'y pouvons rien ; tout ne se simplifie pas toujours en mathématiques.

Exemple. Pour une image de taille 10×12 , le temps de retour sera donc le plus petit commun multiple de 6 et de 10 (voir la justification du 6 et du 10 plus haut), c'est-à-dire 30.

LE CALCUL DU TEMPS DE RETOUR

Les longs moments passés à attendre le retour de l'image nous ont conduits à concevoir et à programmer une méthode de calcul de ce temps de retour qui, même lorsqu'il est très grand, aboutit en quelques secondes. Cela permet à notre logiciel



7. Les retours approximatifs. La transformation du boulanger pour une image de taille 240×160 . Les cycles ont respectivement les longueurs 1, 4, 29, 64, 156, 157, 274, 2183, 22458, 13 074. Ces nombres ont pour plus petit commun multiple 27 720 023 335 722 958 656 qui est le temps de retour (plutôt long!). À l'étape 40 000 000 images (b), tout est brouillé. De même, aux étapes 50 000 000 (d) et 100 000 000 (f). À l'étape 48 935 982 (qui est le ppcm de 13 074, 22 458, 4) les 35537 pixels (c) correspondant aux cycles de longueur 13074, 22458, 4 et 1 sont en bonne place. Cela représente une part importante des 38 400 points de l'image, que l'on reconnaît donc. À l'étape 98 455 872 (ppcm de 22 458, 274, 64, 4) à nouveau un nombre important (22 801) de points est en bonne place (e).

de vous annoncer que, par exemple, l'image initiale sera de retour dans 10 ans 3 mois 5 jours 4 heures et 35 minutes.

Voici le principe de ce calcul qu'il est intéressant de détailler, puisqu'il fait comprendre le retour miraculeux à l'image de départ.

Lorsqu'on applique une transformation bijective, chaque point suit un cycle : par exemple, le point de coordonnées (0,0) va en (1,5) et le point de coordonnées (1,5) va en (3,7), le point de coordonnées (3,7) revient en (0,0) : (0,0) est revenu à sa place au bout de trois applications de la transformation. L'appartenance à un cycle (ici de longueur trois) est la règle générale : chaque point appartient ainsi à un cycle et un seul, dont la longueur bien sûr peut être n'importe quel nombre entier de taille inférieure au nombre de points de l'image. Aussi l'ensemble des points de l'image peut être décomposé en une liste de cycles : par exemple, l'un de longueur 3, un autre de longueur 6, un autre de longueur 15.

Il est clair que chaque point d'un cycle revient à sa place pour les images dont le numéro est un multiple de sa longueur ; donc l'image revient exactement identique à elle-même si son numéro est simultanément un multiple de toutes les longueurs des cycles, autrement dit, si c'est un multiple du plus petit commun multiple des longueurs des cycles. Le plus petit commun multiple de 3, 6 et 15 est 30, donc, avec notre exemple, le temps de retour est 30.

Connaître le temps de retour peut donc s'obtenir simplement en décomposant l'image en cycles et en calculant le plus petit commun multiple de la lon-

gueur des cycles trouvés : même si le temps de retour est de mille milliards, quelques secondes permettent alors de le savoir (ah, les merveilles du raisonnement mathématique!).

Mieux, grâce à la décomposition en cycles de la transformation, vous pouvez, en quelques secondes, connaître l'image numéro 1001 (ou n'importe quel autre nombre aussi grand soit-il) sans avoir à calculer les images précédentes. Explicitons cette idée, en supposant que les cycles sont, comme précédemment, de longueur 2, 6 et 15.

Vous calculez le reste de la division de 1001 par 2, c'est 1, et, pour chaque point de l'image appartenant à un cycle d'ordre 2, vous appliquez donc une fois la transformation.

Vous calculez le reste de la division de 1001 par 6, c'est 5 (car $1001 = 166 \times 6 + 5$) et donc, pour chaque point des cycles d'ordre 6, vous appliquez cinq fois la transformation à ces points.

Vous divisez 1001 par 15, ce qui donne un reste de 11. Pour les points appartenant aux cycles de longueur 15, vous appliquez donc 11 fois la transformation. Au total, vous n'avez que très peu appliqué la transformation (et à chaque fois en quelques points), pourtant vous connaissez maintenant la position de chacun des points après 1001 applications de la transformation.

Dans le cas général, l'utilisation de cette idée demande une bonne organisation du calcul et le stockage des cycles en mémoire. Mais, pour aller directement à une image lointaine, la procédure est incomparablement plus rapide que la méthode naturelle consistant à appliquer autant de fois qu'il le faut la transformation à chaque point de l'image.

LE FLOU EXPLIQUÉ

Cette décomposition en cycles nous permet aussi de comprendre pourquoi l'image revient proche de l'image initiale pour certaines valeurs du numéro d'image. En effet, imaginons que le temps de retour soit très long et de la forme $2m$. Supposons que l'on s'arrête à l'image numéro m . Tout cycle possède une longueur qui est un diviseur de $2m$ (car, d'après ce que l'on a vu, le temps de retour est un multiple de la longueur de chaque cycle) ; s'il y a des cycles d'ordre impair, leur longueur divise donc m , et donc leurs points sont bien en place dans l'image numéro m . Dès que suffisamment de points sont en place, le contenu de l'image nous apparaît superposé à une sorte de bruit qui ne nous empêche pas de voir l'image.

La figure 7 représente des images dont les numéros assurent ainsi que de nombreux points sont à la bonne place : les images obtenues sont des retours approximatifs à l'image de départ. On comprend alors qu'il n'y a pas à s'étonner, lors de l'application répétée d'une transformation bijective, de retrouver ces réminiscences partielles que nous avons remarquées dans la figure 6. L'explication de leurs déformations est de même nature.

Grâce à l'arithmétique des cycles, les fascinantes bizarreries des transformations bijectives de points deviennent un peu moins mystérieuses. Cela n'enlève rien à leurs charmes, que nous vous invitons à explorer en visitant notre site et en utilisant le logiciel que nous avons conçu pour cela.

Jean-Paul DELAHAYE est directeur adjoint du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS. Philippe Mathieu est professeur d'informatique au LIFL.

e-mail : delahaye@lifl.fr

Adresse internet pour d'autres images et le logiciel gratuit :

<http://www.lifl.fr/~mathieu/transform>

J.-P. DELAHAYE, *Le mélange des cartes*, in *Pour La Science*, mars 1997.

R.L. DEVANEY, *Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1988.

H.-O. PEITGEN, H. JÜRGENS et D. SAUPE, *Chaos and Fractals, New Frontiers of Science*, Springer-Verlag, pp. 536-548, 1992.

I. PRIGOGINE et I. STENGERS, *La nouvelle alliance*, Gallimard, chapitre 9, 1979.
