Revue d'Histoire des Mathématiques

Évariste Galois, un candidat à l'École préparatoire en 1829

Caroline Ehrhardt

Tome 14 Fascicule 2

2008

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publiée avec le concours du Ministère de la culture et de la communication (DGLFLF) et du Centre national de la recherche scientifique

REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Périodicité : La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

Tarifs 2008 : prix public Europe : 65 €; prix public hors Europe : 74 €;
prix au numéro : 36 €.
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Diffusion : SMF, Maison de la SMF, B.P. 67, 13274 Marseille Cedex 9
AMS, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940 USA

Maquette couverture : Armelle Stosskopf

Revue d'histoire des mathématiques
14 (2008), p. 289–328

ÉVARISTE GALOIS, UN CANDIDAT À L'ÉCOLE PRÉPARATOIRE EN 1829

Caroline Ehrhardt

Résumé. — L'article présente la copie rendue par le mathématicien Évariste Galois à l'épreuve de mathématiques du concours d'admission à l'École préparatoire en 1829. La confrontation de ce document méconnu, témoignage des années d'apprentissage du mathématicien Galois, aux copies des autres candidats de 1829 et aux archives relatives au concours d'admission pour la période 1826-1830 permet de décrypter les pratiques concrètes d'enseignement des mathématiques et les capacités développées par les étudiants au début du XIX^{e} siècle. Cette analyse ouvre ainsi des pistes quant au lien entre la formation scolaire et le savoir-faire savant.

Abstract (Évariste Galois in 1829 at the entrance competition for the École préparatoire)

The article presents and analyses Évariste Galois's solution of the problems set at the 1829 entrance competition for the Paris *École préparatoire*. Comparing this document with the papers of the other candidates in 1829 and with the archives of this competitive exam from 1826 to 1830 reveals much about the training that Galois received as a mathematician, and sheds light on the nature and limits of the students' mathematical capabilities at the beginning of the 19th century in France. The article thus contributes to the understanding of the relation between mathematical training and the making of mathematical knowledge.

C. Ehrhardt, Centre d'histoire des sciences Alexandre Koyré-EHESS, 54 bd Raspail, 75006 Paris, France.

Courrier électronique : `caroline.ehrhardt@mageos.com`

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A55.

Mots clefs : Évariste Galois, École préparatoire, enseignement des mathématiques, manuels scolaires, XIX^{e} siècle.

Key words and phrases. — Évariste Galois, *École préparatoire*, mathematical teaching, mathematical textbooks, 19th century.

L'œuvre d'Évariste Galois (1811-1832), qui a fait l'objet d'une édition critique intégrale en 1962, est aujourd'hui bien connue des mathématiciens comme des historiens. [1] Ce formidable outil de travail rassemble non seulement les articles et mémoires mathématiques, mais également quelques copies d'étudiant versées au dossier Galois par Paul Louis Émile Richard, son professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand, les lettres et les brouillons dont la transcription, fidèle jusque dans les ratures, les hésitations et les retouches, permet d'apprécier le cheminement de la pensée de Galois. Tous les manuscrits édités sont conservés à la bibliothèque de l'Institut de France, à Paris, sous la cote Ms 2108.

L'ouvrage, pourtant, ne regroupe pas *tout* ce que nous avons conservé de Galois. Avant que la postérité ne le consacre mathématicien, Galois était avant tout, de son vivant, un « étudiant » en mathématiques. [2] Or, si l'on revient souvent sur le caractère paradoxal de ses deux échecs consécutifs au concours d'entrée à l'École polytechnique, en 1828 et 1829, lesquels lui fermèrent définitivement les portes de ce qui était alors le plus prestigieux lieu de formation scientifique français, nous ne savons de son examen, qui se déroula à l'oral, que ce que la légende aujourd'hui associée au nom de Galois a retenu. Son admission en 1829 à l'École préparatoire, institution destinée à former des professeurs de lycée, a fait couler moins d'encre. Ce concours, pourtant, présente l'avantage d'avoir laissé des traces exploitables par l'historien : il comportait des épreuves écrites, dont les paquets de copies ont été conservés. C'est ainsi la copie de mathématiques de Galois au concours d'admission à l'École préparatoire, jusqu'ici peu connue, que nous voudrions analyser ici en tant que témoignage des années d'apprentissage de Galois. [3]

1 Voir [Galois 1962].

2 Nous utilisons ici ce terme au sens « élève de l'enseignement supérieur ». De fait, la question du groupe social que recoupe la catégorie « étudiants » est complexe et, au début du XIXe siècle, on parle davantage de « la jeunesse des Écoles » pour désigner ce groupe. Voir par exemple [Caron 1991] et [Moulinier 2002].

3 Ce document est signalé dans [Taton 1971, pp. 123-148]. Quelques lignes en sont reproduites dans [Auffray 2004, p. 135 et pp. 139-140]. L'auteur présente à tort ce document comme une copie de Galois au Concours général.

1. UN MANUSCRIT PEU CONNU : LA COPIE DE MATHÉMATIQUES DE GALOIS DU CONCOURS D'ENTRÉE À L'ÉCOLE PRÉPARATOIRE

Le manuscrit est conservé aux Archives nationales sous la cote F/17/4176, qui regroupe les documents relatifs au concours d'admission de l'École préparatoire pour l'année 1829 ; on y trouve un dossier donnant des informations sur les candidats, ainsi que les dossiers contenant, pour chacune des épreuves écrites, le sujet, les commentaires du correcteur et le paquet de copies. La copie de Galois se trouve donc parmi celles des vingt-quatre candidats de la section sciences, dont on connaît l'origine scolaire et, parfois, l'origine sociale.

Pour les mathématiques, Galois a travaillé sur deux doubles feuilles, dont la première porte l'en-tête « Concours général de 1828 » et la seconde « Concours général de 1827 » et dont il n'a rempli que trois feuillets recto verso. L'épreuve n'était pas anonyme : le cartouche indiquant la provenance et la date de naissance du candidat n'est pas rempli, mais le nom de Galois figure sur chacune d'entre elles. Les deux questions posées, que Galois a traitées dans l'ordre du sujet, sont d'égale importance sur la copie. L'écriture, malgré quelques passages rayés et quelques corrections, est soignée et facilement lisible, ce qui reflète une certaine application : avec six heures pour répondre à deux questions, Galois n'a pas travaillé dans l'urgence. Le correcteur, Charles Félix Leroy, n'a pas annoté la copie et n'a pas davantage fourni d'appréciation générale : il est indiqué, sur un document rédigé séparément, que Galois a été classé premier. [4]

Le sujet, que Galois n'a pas recopié, est joint au paquet de copies de mathématiques :

> 1) Exposer, sur une équation de degré quelconque, le moyen d'obtenir :
>
> > 1) une limite supérieure des racines positives.
> > 2) une limite inférieure des racines négatives, c'est-à-dire un nombre plus grand *numériquement* que toutes les racines de ce dernier genre.

---

4 La lettre de Leroy relative à l'épreuve écrite de 1829 se trouve en fait dans le dossier de l'année 1828 (Archives nationales F/17/4174). Dans le dossier de l'année 1829 (Archives nationales F/17/4176), on apprend que Galois a obtenu 8/10 lors de l'examen oral, et que cela lui a valu la seconde place.

Puis appliquer ce résultat à l'équation suivante que l'on débarrassera d'abord de tout dénominateur : $\frac{x^3-12}{x^2-2} = \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^2-2}$.

2) Exposer sur l'équation générale des courbes du second degré la méthode qui sert à trouver les asymptotes, directement et sans avoir besoin d'effectuer une transformation de coordonnées. On appliquera ensuite cette méthode à la courbe :

$$y^2 + 3x^2 - 4xy + x + 2y - 1 = 0,$$

dont il faudra d'ailleurs construire les lignes ou points remarquables tels le centre, les diamètres, les axes, etc.

NB : Les deux questions précédentes sont également obligatoires et les candidats doivent être privés du secours de tout ouvrage de mathématiques.

Les deux questions sont donc construites selon le même principe : on demande d'exposer une méthode générale puis de la mettre en œuvre dans un cas particulier. Chacune des applications requiert en outre une compétence supplémentaire : la première fait appel au savoir-faire du candidat en matière de calcul algébrique, la deuxième nécessite une construction géométrique.

Galois présente deux méthodes pour la première question ; dans les deux cas, l'obtention de la limite supérieure des racines est expliquée précisément, celle de la limite inférieure, qui repose sur le changement de variable $x = -y$, est simplement esquissée. La première méthode exposée est la méthode de Newton, que Galois désigne explicitement comme telle. Elle consiste à effectuer le changement de variable $x = K + z$, pour obtenir un nouveau polynôme d'inconnue z dont les coefficients s'expriment en fonction de K et des dérivées successives du polynôme de départ ; il s'agit ensuite de trouver une valeur de K qui rende tous les coefficients du nouveau polynôme positifs en même temps : cette valeur est une limite supérieure des racines positives. La deuxième méthode permet d'obtenir une valeur directement à partir des coefficients de l'équation. Il suffit de prendre la valeur absolue du plus grand coefficient négatif, d'en extraire la racine n-ième, où n est la différence entre le degré de l'équation et celui du premier terme négatif (avec le vocabulaire employé par Galois, $n+1$ est le rang du premier terme négatif), et d'y ajouter 1. Les deux méthodes, nous y reviendrons, sont classiques : elles figurent dans la plupart des manuels d'algèbre du début du XIX^{e} siècle.

En ce qui concerne l'application numérique, les opérations permettant de transformer l'équation initiale en équation algébrique par la suppression des dénominateurs ne sont pas explicitées. Galois donne ensuite les valeurs des limites fournies par chacune des deux méthodes, mais seule la première fait l'objet de calculs détaillés. Pour la seconde, il se contente d'indiquer le résultat.

Pour répondre à la deuxième question, Galois commence par rappeler la définition des asymptotes à une courbe, avant d'exposer une règle générale, valable quel que soit le degré de la courbe et fondée sur un procédé algorithmique, qu'il utilise finalement dans le cas des courbes du second degré. Pour l'application numérique, comme dans la question précédente, le détail des calculs n'est pas explicité. De même, Galois donne les coordonnées du centre en précisant qu'il s'agit de l'intersection des asymptotes, puis les équations des axes et diamètres en indiquant la marche à suivre, mais sans en écrire les calculs. Enfin, contrairement à ce que l'on pouvait présager au vu de l'intitulé de la question, aucune courbe n'est jointe à la copie.

Ce manuscrit ne présente rien de novateur d'un point de vue mathématique : on est bien loin des brouillons de recherche, patiemment déchiffrés par Robert Bourgne et Jean-Pierre Azra. Il offre cependant des pistes d'analyse intéressantes pour l'historien. En effet, il s'agit de la copie d'un élève dont l'apprentissage scolaire nous est connu à travers d'autres sources, et dont on peut retracer sans difficulté le parcours. De ce point de vue, l'élève Galois nous offre une perspective privilégiée sur l'enseignement des mathématiques en France au début du XIX^{e} siècle. En effet, la clé de lecture de ce document ne réside pas dans ce qu'il a de particulier ou d'original, mais au contraire dans ce qu'il révèle de conforme dans les pratiques mathématiques d'un jeune géomètre dont on s'attache toujours à mettre en avant l'originalité. Une copie d'étudiant ne trouve sa signification que dans le paquet dont elle est extraite et le contexte de l'examen pour lequel elle a été rédigée.

2. LE CONCOURS D'ENTRÉE À L'ÉCOLE PRÉPARATOIRE À LA LUMIÈRE DU CAS DU CANDIDAT ÉVARISTE GALOIS

En 1829, l'École préparatoire vient tout juste d'ouvrir ses portes. Elle succède à l'ancienne École normale, que le Grand Maître de l'Université, Denis-Luc-Antoine de Frayssinous, a fait supprimer en 1822 car il la jugeait trop libérale. [5] Les élèves susceptibles de se porter candidats doivent être recommandés par le proviseur de leur établissement, qui se porte garant de leur moralité et de leurs principes religieux. Tous les élèves présentés ne sont cependant pas admis à concourir. Si les critères de cette première sélection ne sont pas explicités, l'examen des dossiers de candidature démontre qu'il n'y a pas de passe-droit lié au statut social de la famille : par exemple, le neveu du recteur de l'académie de Besançon, Calmera, n'a pas été retenu, alors que Wartel, enfant naturel originaire de l'académie de Douai, a pu passer les épreuves écrites. [6]

En ce qui concerne Galois, la lettre de recommandation jointe à la candidature montre toutefois que c'est grâce à ses capacités scolaires qu'il a été autorisé à passer le concours. En effet, selon le recteur de l'académie de Paris :

> « Ce candidat, élève de mathématiques spéciales au collège royal Louis-le-Grand, est un des sujet les plus distingués de ce collège et [...] par ses rares dispositions, il promet d'être pour l'université une bonne acquisition ». [7]

Les bulletins scolaires de Galois, que son premier biographe, Paul Dupuy, a édités en annexe de son étude, ne laissent aucun doute quant à la nature exclusivement mathématique de ces dispositions : Galois ne faisait rien en physique, ses résultats en latin et en grec passèrent d'excellents à médiocres en l'espace de deux ans, et son comportement était loin d'être irréprochable. [8] Il n'y avait guère que son professeur de mathématiques, E. Richard, qui était satisfait de lui : il nota, pour le premier trimestre de

---

5 Sur la remise en cause du système éducatif issu de la Révolution lors de la Restauration voir [Dhombres & Dhombres 1989, pp. 629-640].

6 Liste des candidats admis à concourir pour l'année 1829, Archives nationales, F/17/4176.

7 Archives nationales, F/17/4176.

8 Les bulletins scolaires de Galois sont publiés dans [Dupuy 1992, pp. 84-90].

l'année scolaire 1828-1829 que cet élève avait « une supériorité marquée sur tous ces condisciples » puis, pour le second, qu'il ne travaillait « qu'aux parties supérieures des mathématiques ». Ces appréciations, que les biographes ont maintes fois reprises, laissent penser que Galois dédaignait les activités scolaires courantes, trop faciles pour lui. Nous verrons que son épreuve de mathématiques pour le concours de l'École préparatoire donne une tout autre image de ce mathématicien.

Une fois admis à concourir, Galois a rejoint les autres candidats parisiens pour subir les épreuves écrites, dans la semaine du 20 au 27 août 1829. En effet, les candidats étaient alors regroupés pour cela par le recteur dans le chef-lieu de leur académie d'origine. Les conditions concrètes des épreuves étaient probablement très différentes selon les lieux. Leur déroulement n'a laissé que peu de traces, mais cette hétérogénéité est manifeste si l'on examine les supports matériels sur lesquels les candidats ont composé. En effet, certaines copies, comme celles de Galois, proviennent du Concours général de 1827, 1828 ou 1829, d'autres sont des feuilles libres, de formats variés, et qui peuvent être des copies simples ou des doubles feuilles. Nous ne sommes pas parvenue à savoir si celles-ci étaient fournies aux candidats, mais le fait que Galois ait composé sur des copies vieilles de deux ans, ou encore que les deux candidats de l'Académie de Cahors aient composé sur des copies bleues identiques, porte à le croire. Il n'y a pas, en revanche, de copies spécifiquement imprimées pour le concours de l'École préparatoire. Tous ces indices laissent penser que le déroulement du concours n'était pas organisé de façon centralisée.

En ce qui concerne la rigidité des règles de recrutement, l'examen des refus de candidature ou d'admission qu'adresse le ministère au cours de la période 1826-1836 montre que la procédure de recrutement par présélection au niveau académique puis examen écrit était figée dès la mise en place de l'École préparatoire. La nécessité de faire passer les candidatures par le recteur et de se plier aux lois et aux délais du concours était ainsi systématiquement mise en avant dans les lettres que le ministre envoyait aux familles.[9] Pourtant, la candidature de Galois étant arrivée tardivement, après que la liste des candidats avait été arrêtée, il n'aurait en

9 Archives nationales, F/17/4170.

principe pas dû concourir. Il a en fait bénéficié pour cela de l'appui du recteur.[10]

Cette anecdote, néanmoins, ne doit pas être interprétée comme un passe-droit dont aurait bénéficié spécifiquement Galois. Il faut plutôt y lire une certaine souplesse dans le déroulement réel du concours, qui se manifeste également dans les dossiers d'autres candidats. Dans l'académie d'Angers, par exemple, le recteur expliqua que le candidat Lalande n'avait pas fait parvenir les certificats exigés, mais qu'il le considérait tout de même digne d'être appelé à concourir.[11] De même, alors que le règlement stipulait que les candidats devaient être munis du diplôme du baccalauréat, le directeur de l'École préparatoire, Guignault, expliqua dans une lettre au ministre en 1830 que « l'usage » s'est établi à l'École d'admettre provisoirement les candidats de la section sciences sans qu'ils soient bacheliers ès-sciences, et de leur permettre de passer les examens par la suite. Il semble que cette « mesure de tolérance » s'étendait également au baccalauréat ès-lettres puisque Galois a été admis en 1829 sans l'avoir passé, de même que Paul Flaugergues et Jules Martin en 1830.[12]

Le déroulement de l'épreuve lui-même, d'ailleurs, ne semble pas obéir à des règles très strictes. Dans une lettre relative au concours de 1828 qu'il adresse au ministère, le correcteur de mathématiques, Leroy, déplore ainsi les irrégularités de l'année précédente :

10 Voir la lettre de recommandation adressée par le recteur au ministère, Archives nationales, F/17/4176.

11 En fin de compte, Lalande ne passera pas le concours, mais parce qu'il est trop âgé. Un autre exemple est fourni par Christophe Mermet, en1828. Son père demande à être reçu par le Comte de Cournille, directeur de l'Instruction publique, pour défendre le cas de son fils. Il explique dans sa lettre que le jeune Mermet s'étant aperçu peu avant la fin de l'épreuve de mathématiques qu'il avait fait une erreur de calcul qu'il n'avait plus le temps de corriger, il en fit part aussitôt au correcteur de l'épreuve, Leroy, lequel lui fit subir un examen dont il fut très satisfait (Archives nationales, F/17/4170). Christophe Mermet sera finalement admis à l'École préparatoire, après avoir pourtant transgressé ce qui apparaît aujourd'hui comme une règle fondamentale de tout concours de recrutement.

12 Lettre du directeur Guignault au ministre, concernant la promotion 1830, Archives nationales, F/17/4178.

« Parmi les élèves qui l'année dernière m'avaient paru admissibles, plusieurs se sont trouvés incapables de subir l'épreuve du baccalauréat et ont fini par m'avouer qu'on les avait aidés dans leurs compositions ».

Il insiste donc pour que les candidats composent "sans le secours de livres ou l'aide des surveillants" ».[13]

Si l'on ne peut que donner un aperçu des conditions matérielles dans lesquelles Galois a passé les épreuves écrites de la section « Sciences » du concours, on sait en revanche qu'elles étaient au nombre de cinq (discours français, philosophie, version latine, mathématiques et physiques), d'une durée comprise entre 4 et 6 heures, et que les trois épreuves littéraires étaient en fait communes aux sections « Lettres » et « Sciences », avec un sujet unique pour tous les candidats.[14] Les candidats à la section « Sciences » devaient en outre subir une interrogation orale portant sur l'explication des auteurs latins. Une fois les épreuves terminées, les copies en provenance des diverses académies étaient rassemblées à Paris pour y être distribuées aux correcteurs. Chacun d'entre eux se chargeait alors de la totalité du paquet de sa spécialité.

Au final, parmi les 24 candidats, six élèves sont admis pour la section « Sciences ». Ce sont, dans l'ordre de mérite : Pollet, Galois, Lassasseigne, Choffel, Trécourt et Moreau. La liste de l'ordonnance royale du 25 octobre 1829 correspond ici parfaitement avec la proposition des correcteurs de mathématiques et de physique Leroy et Péclet du 21 octobre. Il importe donc peu que Galois ait obtenu des résultats médiocres dans les matières littéraires (il a été classé 45^{e} sur 92 en philosophie, 70^{e} sur 94 en français et 21^{e} sur 93 en latin). De fait, Lassasseigne, dernier en version latine et en discours français, a fait largement pire.[15] De même, Galois, pourtant honorablement classé 6^{e} à l'épreuve écrite de physique[16], a eu un mauvais résultat à l'oral de vérification (3/10), mais qui ne semble pas l'avoir

13 Archives nationales, F/17/4174. Le dossier F/17/4176 fait état d'une autre irrégularité survenue en 1827 : le correcteur de physique a dû renvoyer au ministère une copie de mathématiques qui s'était glissée dans le paquet qu'on lui avait transmis.

14 Les épreuves écrites sont au nombre de six pour la section « Lettres » (discours français, philosophie, version latine, vers latins, discours latin, version grecque).

15 Archives nationales, F/17/4176.

16 Les résultats des épreuves écrites de mathématiques et de physique de 1829 sont rangés dans le dossier F/17/4174, relatif à l'année 1828.

pénalisé. [17] Finalement, l'appréciation du directeur de l'École destinée à justifier l'admission de Galois auprès du ministre explique que :

> « L'élève Gallois est faible en physique, mais son examen de mathématiques est bon et doit prévaloir. Il est quelquefois obscur dans ses idées, mais il a de l'intelligence et montre un esprit de recherche très remarquable. » [18]

Grâce aux mathématiques, Galois est ainsi déclaré admis en deuxième position dans la section « Sciences » de l'École préparatoire, sous réserve qu'il obtienne ses baccalauréats ès-sciences et ès-lettres au cours de l'année suivante.

Le cas de Galois révèle donc un contraste entre les pratiques concrètes d'évaluation, dans le cadre d'un concours où celles-ci ne relèvent pas seulement d'une moyenne chiffrée, et les critères formels et mesurables que laissent transparaître les règlements, les systèmes d'organisations et leurs conséquences sur la formation des élèves. En effet, contrairement à l'organisation du concours d'entrée à l'École polytechnique, où cette épreuve, censée mesurer l'intelligence des candidats, est prépondérante, les mathématiques ne constituent *a priori* qu'une petite partie du concours d'entrée à l'École préparatoire. Sur les cinq épreuves de la section sciences, deux seulement sont scientifiques et les trois autres littéraires. Par ailleurs, les deux épreuves de sciences avaient la même durée que celles de français et de philosophie. Nous ne disposons d'aucune indication quant aux éventuels coefficients appliqués aux différentes épreuves. Nous n'en savons pas davantage sur les poids relatifs des appréciations et des évaluations chiffrées des correcteurs : nous n'avons trouvé aucun texte officiel qui établisse de manière explicite la façon d'obtenir une évaluation globale à partir des évaluations par matières. Si l'on s'en tient au règlement du concours, l'École préparatoire semble ainsi réclamer de ses élèves, futurs professeurs de lycées, une grande polyvalence.

---

17 La note chiffrée, il est vrai, est tempérée par une bonne appréciation de Péclet, qui précise que « la solution est inexacte mais cet élève avait considéré la question sous un point de vue plus général que les autres concurrents ; il s'est trompé avec intelligence ». Archives nationales, F/17/4174.

18 Archives nationales, F/17/4176, lettre de Migniard.

En revanche, l'évaluation en cours de scolarité ne reposait plus que sur les sciences.[19]

Par ailleurs, si l'on en croit l'analyse qu'a faite Jules Tannery lorsqu'il a entrepris de retracer l'histoire de l'enseignement des mathématiques pour la célébration du centenaire de l'École, en 1895, les mathématiques y ont été longtemps considérées comme une discipline mineure. Il explique en effet que jusqu'à un passé récent l'École était avant tout « faite pour fabriquer des professeurs » et qu'un professeur « était assez bon mathématicien s'il était capable de bien enseigner la division abrégée ».[20]

Pourtant, le candidat Évariste Galois, qui doit son admission à son résultat en mathématiques, laisse entrevoir une autre logique du système de recrutement. En l'absence d'informations pour l'année 1829, et afin d'essayer de comprendre comment s'effectuait la sélection, nous avons eu recours aux dossiers relatifs aux années 1827 et 1828.[21] En effet, chacun d'entre eux contient un tableau donnant le classement des candidats admis dans la section « sciences », et un autre fournissant les résultats de la totalité des candidats pour cette section. Ces documents indiquent les « points » attribués à chacun dans les différentes épreuves, qui correspondent en fait aux classements et non à une évaluation chiffrée des copies.

Pour l'année 1827, les points obtenus pour les cinq épreuves sont ensuite additionnés, sans qu'aucun coefficient ne soit appliqué. Pourtant, les candidats reçus ne sont pas ceux qui affichent les plus petits totaux sur l'ensemble des épreuves, et le classement sur la liste des admis ne correspond pas davantage à l'ordre des scores.[22] Le total des points des matières scientifiques ne coïncide pas non plus avec le classement

19 En 1830, le compte-rendu des examens de fin d'année mentionne uniquement le classement et la note des élèves en mathématiques et en physique. Galois y fut classé 4^{e} sur 9, et faisait partie du groupe des élèves considérés comme « forts » par Guignault. (Archives nationales F/17/4171).

20 Voir [Tannery 1895, pp. 387-394].

21 Archives nationales, F/17/ 4173 et F/17/4174.

22 Gueppratte est ainsi classé premier, alors que son score de 142 le place en dessous, par exemple, de Hilaire qui n'a pas été reçu malgré ses 111 points ; le même Gueppratte supplante également Braive, admis lui aussi, mais avec 70 points

des admis.[23] De fait, le seul critère objectif qui semble avoir présidé au classement des candidats reçus est leur résultat en mathématiques, qui concorde parfaitement avec l'ordre d'admission. Pour l'année 1828, les règles semblent légèrement différentes : cette fois-ci, le classement des admis correspond à l'ordre de mérite dans les deux matières scientifiques, obtenus en additionnant les deux classements, et non aux seuls résultats en mathématiques.[24] Aucun de ces deux principes, néanmoins, ne s'applique rigoureusement à l'année 1829, comme le montre le tableau suivant :[25]

(CM = Classement en mathématiques[26], SCMP = Somme des classements en mathématiques et physique, CFMP = Classement final en mathématiques et en physique)

Nom	CM	SCMP	CFMP
Galois	1	8	2
Lassasseigne	2	10	3
Pollet	3	4	1
Choffel	4	**26**	4
Laurent	5	**26**	7
Gérard	6	**29**	8
Trécourt	7	9	5
Blavette	8	**32**	11
Moreau	9	**29**	6
Lamache	10	19	9
Bisset	11	17	10
Thoury	12	**27**	12
Jeauffray	14	24	Non classé
Delaunay	15	19	Non classé
Duver	16	40	Non classé
Guyennot	17	36	Non classé

23 Braive, là encore, aurait dû se trouver devant Gueppratte.

24 Cette règle semble avoir été appliquée également en 1826, mais aucun tableau de classement n'a été conservé. L'ordre des admis correspond encore avec la somme des classements en sciences, sans tenir compte des lettres. Archives nationales, F/17/4172.

25 Seuls les candidats ayant passé les deux épreuves ont été pris en compte.

26 Ce classement, comme celui de physique, est dans le dossier F/17/4174 de l'année 1828.

Bolley	18	36	Non classé
Girard	19	29	Non classé
Gimelli	20	36	Non classé
Reboul	21	36	Non classé
Charpentier	22	25	Non classé

Ainsi, les douze candidats retenus par Leroy et Péclet sont ceux qui ont eu les meilleurs résultats en mathématiques. Le classement en physique n'intervient que pour modifier l'ordre final, et il n'est en aucun cas éliminatoire : parmi les douze premiers, cinq (notés en gras) n'étaient pas aptes, selon Péclet, à suivre les cours de l'École et l'un d'entre eux, Choffel, est même placé en position d'être admis. En revanche, le troisième meilleur candidat en physique, Charpentier, ne fait pas partie de la liste des classés.

Nous n'avons pas examiné les résultats des oraux de vérification de 1827 et 1828. L'année 1829, en tout cas, laisse penser qu'il est peu probable que ces oraux aient joué un grand rôle dans l'évaluation finale et le classement des candidats : Choffel, que Leroy, suite à l'examen de vérification du 25 septembre, « regarde comme inadmissible », a pourtant été admis à l'École préparatoire par l'ordonnance du 25 octobre, avec le même classement que celui obtenu à l'épreuve écrite. [27]

Ainsi, l'examen de la promotion 1829 de la section « Sciences » de l'École préparatoire permet de conclure que c'est sur les mathématiques exclusivement que s'est jouée l'admission. On comprend mieux pourquoi aucun des autres résultats de Galois ne l'a pénalisé. Classé premier en mathématiques, il était assuré d'être reçu, et son cas n'a rien ici d'une exception. Deux années auparavant, le candidat Gueppratte s'était également retrouvé à la première place des admis, parce qu'il était premier en mathématique, et bien qu'il ait été classé 9^{e} sur 20 en physique, et respectivement 71^{e}, 47^{e} et 14^{e} sur 90 en latin, français et philosophie.

C'est maintenant vers cette épreuve décisive de mathématiques que Galois a passée qu'il faut nous tourner, afin de définir ce que signifiait un tel classement relativement au niveau d'exigence des examinateurs et à leurs critères d'évaluation.

---

27 Archives nationales, F/17/4176.

3. L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES DE 1829

L'épreuve de mathématiques du concours d'entrée à l'École préparatoire constitue l'une des rares sources susceptibles de nous livrer des détails concrets sur ce qu'était un examen de mathématiques au début du XIXe siècle, époque où le baccalauréat et le concours d'entrée à l'École polytechnique se passaient à l'oral. [28] Le sujet posé aux candidats en 1829 est en fait constitué de deux questions de cours, portant sur des thèmes très classiques, chacune étant suivie d'une application numérique.

La solution à la première question se trouve dans de nombreux manuels d'algèbre élémentaire destinés aux élèves de mathématiques spéciales, au chapitre « résolution des équations numériques ». [29] Les auteurs commencent par montrer que l'on peut trouver un nombre qui, substitué à l'inconnue dans l'équation, en rende le terme de plus haut degré supérieur à la somme de tous les autres, ce qui garantit l'existence d'une limite supérieure des racines. Ils exposent ensuite une méthode de calcul d'une telle limite, fondée sur des manipulations algébriques et des transpositions de termes, en se servant du coefficient négatif le plus grand en valeur absolue. Si on note ce coefficient N, $N+1$ est une limite supérieure. Cette valeur est ensuite affinée dans le cas où le coefficient N n'est pas celui du terme suivant celui de plus haut degré : on obtient alors une valeur de la forme $1 + \sqrt[k]{N}$. La limite inférieure des racines est enfin obtenue en substituant son opposé à l'inconnue dans l'équation.

Certains ouvrages présentent ensuite une méthode supplémentaire, dite « de Newton », qui consiste quant à elle à remplacer x par $(k + z)$ dans l'équation, où k est la limite recherchée et z un nombre positif, puis à déterminer k de telle sorte que la nouvelle équation d'inconnue z ait tout ses coefficients positifs. Le calcul de ces coefficients repose ici sur les dérivées successives du polynôme initial, mais les auteurs éludent la

28 L'épreuve de français de 1826 a fait l'objet d'une étude, [Albertini 1990] qui offre un point de départ méthodologique à l'analyse de ce type de corpus.

29 Voir par exemple [Bourdon 1817, pp. 503-513], [Lacroix 1807, pp. 294-298], [Choquet & Mayer 1832, pp. 398-402]. Tous ces ouvrages ont connu de nombreuses rééditions ; seul le dernier n'était pas encore publié en 1829.

question, car le calcul différentiel ne fait pas partie du programme des classes préparatoires. [30]

La question sur les courbes du second degré renvoie à l'étude des sections coniques. Il s'agit d'une partie importante du programme des classes préparatoires, que l'on trouve également dans les manuels, à la section « applications de l'algèbre à la géométrie ». Les sections coniques y sont habituellement traitées par deux méthodes, changement de variables et séparation des variables ; l'énoncé impose ici la seconde. [31] La question des asymptotes est systématiquement traitée dans les manuels au cours de l'étude, mais le point de vue général sur ce sujet n'est pas toujours abordé. [32]

L'examen de l'ensemble du paquet de copies montre que ces connaissances étaient familières pour les candidats au concours de l'École préparatoire de 1829 : la première question a été traitée par tous les candidats, et seuls trois d'entre eux n'ont pas répondu à la deuxième. En outre, le paquet révèle une très grande uniformité. Mis à part Bolley et Galois, tous les candidats ont traité ce sujet selon un plan similaire à celui des manuels : ils commencent par obtenir la valeur $N+1$, puis tous sauf 6 en donnent une valeur plus précise en $1+\sqrt[k]{N}$. Un seul candidat (Gimelli) annonce des résultats sans démonstration. Bolley, quant à lui, débute directement avec la seconde valeur. Les seules différences entre les copies résident en fait dans la conduite des calculs, mais on ne distingue ici que deux groupes : un peu plus de la moitié des candidats les mène facilement en quelques lignes en utilisant la factorisation du polynôme $x^n - 1$, les autres passent tous par une méthode de division qui est plus longue.

En revanche, la méthode de Newton n'est mentionnée que par 5 candidats, et l'un d'entre eux ne l'utilise en fait que pour l'application numérique. Il faut noter ici que contrairement à ses camarades, c'est par

30 Les programmes du concours d'entrée à l'École polytechnique, qui régissent ceux des classes préparatoires, sont publiés dans [Belhoste 1995].

31 Les deux méthodes apparaissent dans [Bourdon 1825], dans [Lefébure de Fourcy 1827]. Le changement de variable est largement privilégié dans [Lacroix 1822].

32 Parmi les ouvrages de la note précédente, seul Lefébure de Fourcy donne le point de vue général, tiré des cours d'analyse de Cauchy.

cette méthode que Galois a débuté, avant de poursuivre par un exposé semblable aux autres.

Les réponses sont moins homogènes pour la deuxième question, mais on ne trouve que deux démarches différentes, chacune représentant environ la moitié des copies. Certains candidats commencent par exprimer y en fonction de x en utilisant l'équation de la courbe du second degré, puis extraient la racine carrée. Ils expliquent alors qu'il y a une asymptote si l'expression de l'ordonnée y peut se mettre sous la forme :

$$y = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} + \cdots$$

D'autres démontrent que, de manière générale, pour qu'une courbe admette une asymptote, on doit pouvoir écrire

$$y = cx + d + V,$$

où V tend vers 0 quand x tend vers l'infini. Ils expliquent ensuite comment obtenir c et d, puis appliquent ces résultats au cas particulier du second degré. Il faut noter ici que, pour ce groupe de candidats, les notations choisies (c, d et V), et les étapes de calculs de c et de d sont identiques. De fait, elles correspondent rigoureusement à celles du manuel d'application de l'analyse à la géométrie de Lefébure de Fourcy.[33]

Pour cette deuxième question, les différences résident davantage dans les détails donnés : certains élèves profitent de la question pour établir une distinction entre les différentes coniques, alors que d'autres se limitent à l'hyperbole. Elles diffèrent également au niveau des compléments apportés : les cas particuliers obtenus lorsque certains coefficients sont nuls ou égaux entre eux et la question des asymptotes verticales ne sont abordés que par certains candidats.

Les copies constituent donc un corpus particulièrement uniforme : les étapes des démonstrations en sont identiques, et elles ne diffèrent que par la précision, la complétude ou la présence de compléments aux réponses. On ne relève que peu de fautes : quelques erreurs d'indexation, peu d'erreurs de calcul.[34] Les notations et le choix des lettres pour les paramètres

33 Voir [Lefébure de Fourcy 1827, pp. 202-203].

34 On trouve par contre des disparités dans le traitement de la deuxième application, pour laquelle certains esquissent à peine l'étude, alors que d'autres présentent

constituent également un élément d'uniformité important des copies, ce qui tend à prouver que les candidats se sont inspirés des mêmes sources : tout en venant des quatre coins de la France, la très grande majorité étaient élèves des collèges royaux et ont eu accès aux manuels scolaires classiques. [35] Leroy, d'ailleurs, ne s'y trompe pas lorsqu'il stipule que tout livre de mathématiques est interdit pendant l'épreuve.

L'homogénéité de ce corpus de copies, reflet de l'uniformisation de l'enseignement des mathématiques au début du XIX^{e} siècle, offre un cadre privilégié pour évaluer la maîtrise qu'avait Galois des savoir-faire requis par les mathématiques scolaires. En prenant comme hypothèse que la pratique scolaire établit les fondations de la pratique savante, l'analyse du travail de Galois pour le concours d'entrée à l'École préparatoire permet donc d'interroger la connaissance qu'il avait des attentes relatives à une démonstration mathématique, que ce soit dans le cadre d'un examen ou celui d'un travail de recherche.

De fait, la copie de Galois n'est pas immédiatement reconnaissable dans le paquet : nulle trace de génie dans cet exercice strictement scolaire. Cependant, tout en se démarquant peu de ses camarades, ce travail fait preuve d'une certaine originalité. En effet, comme nous l'avons vu, il répond d'abord à la première question par un exposé complet de la méthode de Newton, avant de présenter la méthode plus élémentaire. Il utilise d'ailleurs dans sa démonstration les dérivées successives du polynôme, ce qui ne fait pas partie des connaissances strictement exigibles en classes préparatoires. De plus, il est le seul candidat à commencer la deuxième question par l'étude des asymptotes d'une courbe algébrique de degré quelconque : ses camarades se contentent tous du second degré, comme le préconise l'énoncé et comme c'est le plus souvent le cas

une courbe très détaillée, mais ces différences peuvent être attribuées au manque de temps, que mentionnent plusieurs candidats en fin de copie.

35 Nous n'avons pas réussi à identifier la provenance de tous les candidats, mais on peut tout de même remarquer que la majorité des candidats ayant passé les épreuves est scolarisée à Paris (6 candidats : Galois, Lassasseigne, Trécourt, Bisset, Moreau, Blavette). On trouve également des représentants des académies d'Aix-en-Provence, d'Amiens, de Caen, de Cahors, de Dijon, de Lyon, de Nancy, d'Orléans, de Rennes, de Rouen, de Toulouse. Seuls quatre candidats ne sont plus étudiants, mais ils sont alors maîtres d'études.

dans la littérature scolaire. Lorsqu'il applique cette méthode générale aux courbes du second degré, il est également le seul à écrire qu'il « développe le radical en série », et non qu'il « extrait la racine », comme le font ses camarades.

Les biographes de Galois affirment tous que Galois avait une importante culture mathématique. Ces remarques viennent donc justifier cette affirmation à partir d'un exemple concret, puisqu'on voit que Galois a une connaissance plus approfondie de ces questions que la plupart des élèves de classes préparatoires. Néanmoins, cette étude de cas montre également que Galois demeure le produit des pratiques mathématiques de son temps : comme ses camarades, il s'est efforcé de présenter plusieurs méthodes pour répondre aux questions, puis de traiter avec soin l'application de chacune d'entre elles. En outre, les démonstrations que Galois effectue sont, comme le montrent les nombreuses similitudes avec les réponses de ses camarades, largement inspirées des ouvrages scolaires usuels. Il ne s'agit donc pas là d'une réponse improvisée à partir de savoirs connus le jour de l'examen : l'exercice s'apparente en fait à une restitution de connaissances. Pour arriver à ce résultat, Galois a dû faire un effort d'apprentissage de démonstrations toutes faites présentées dans des manuels. C'est donc en se conformant aux attentes du système, et non grâce à une forme particulière de talent ou de génie, qu'il a réussi le concours d'entrée à l'École préparatoire.

Toutefois, nous l'avons vu, la copie de Galois a été classée première et, malgré leurs similitudes, ces copies ne sont pas équivalentes : elles sont soumises à un jugement de valeur qui établit, par comparaison, une hiérarchie entre elles. Recherchons maintenant les facteurs de différenciations qui président, selon le correcteur, à la qualité des copies, pour comprendre en vertu de quels critères la copie de Galois a été distinguée.

4. LES CRITÈRES DE L'ÉVALUATION EN MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE PRÉPARATOIRE

Leroy n'a annoté aucune des copies de mathématiques de 1829, et il n'a pas davantage fourni d'appréciations individuelles. De ce fait, les critères sur lesquels est fondée l'évaluation de chaque candidat ne sont pas directement accessibles. On peut néanmoins tenter de les cerner en utilisant deux approches complémentaires. D'une part, dans la mesure où les sujets sont précisément conçus pour évaluer les candidats sur ces critères, nous examinerons ceux que Leroy a posés pour la période 1826-1830, afin d'en mettre au jour les points communs. [36] D'autre part, en prenant comme hypothèse que les élèves de 1829, quant à eux, connaissaient ces critères, nous nous efforcerons de comprendre si toutes les copies sont construites selon une structure commune, puis de mettre en relation leurs particularités individuelles et leurs classements. Les quelques indications laissées par le correcteur sur la qualité globale du paquet de 1829, ainsi que celles qui ont été conservées pour les autres années de la période envisagée, permettront de préciser cette analyse.

En 1826, la première question porte sur la résolution de l'équation « $x^4 + 3x^2 + 1 = 0$ », dont il faut déterminer une valeur des solutions au millième près. La deuxième est un problème de construction de géométrie plane, que seul un candidat sur 13 est parvenu à traiter. En 1827, les candidats sont interrogés sur une résolution de système dont les coefficients sont des paramètres, puis on leur demande d'exposer la méthode qui donne les tangentes à une ellipse et de s'en servir pour trouver et construire les tangentes parallèles à une droite particulière. En 1828, il faut d'abord exposer la méthode qui donne les racines commensurables d'une équation numérique, puis l'appliquer à un cas particulier, avant de résoudre un problème de lieu géométrique. En 1830, la même question d'algèbre est posée aux candidats, mais avec une application moins élémentaire. Ils doivent ensuite présenter, à partir d'un exemple fourni ($2y + 2x = \sqrt{4y - 4x - 2x^2 - 7}$), la manière de discuter une équation à deux variables, et construire la courbe en précisant ses éléments remarquables.

36 Nous avons choisi cette période car elle correspond aux années d'existence de l'École préparatoire. En effet, après la suppression de l'École normale en 1822, celle-ci a été recréée sous le nom d'École préparatoire en mars 1826, pour finalement redevenir l'École normale au lendemain de la Révolution de Juillet. La durée des études y fut alors allongée : elle passa de 2 à 3 ans.

Chaque année, les élèves sont donc interrogés sur l'algèbre (c'est-à-dire, selon les catégories du premier XIX^{e} siècle, la théorie des équations) et la géométrie, pour laquelle on peut noter la prépondérance des coniques. Mis à part les deuxièmes questions des années 1826 et 1828, que l'on peut considérer comme des problèmes et qui sont plus difficiles, toutes les autres sont soit des questions « de cours », soit des questions d'application directe de méthodes « de cours », au sens où les manuels en fournissent à la fois des démonstrations et des exemples. Dans le premier cas, le candidat doit systématiquement mettre en œuvre la théorie générale sur un exemple particulier.

De fait, cette épreuve n'était pas destinée à tester l'autonomie et la capacité de réflexion des candidats, mais à mesurer leurs connaissances. Les comptes-rendus qu'ont laissés Leroy et Delisle, qui l'a remplacé pour les corrections de 1828, viennent confirmer cette conclusion : le premier explique que les candidats classés en 1829 ont « des connaissances suffisantes pour profiter des cours de l'École », et le second que les six premiers sont, selon lui, « suffisamment instruits pour être admis ». Ce critère est par ailleurs celui qui préside à la définition des sujets. En effet, pour l'année 1827, Leroy justifie ainsi son choix en expliquant :

> « Comme j'ai la conviction que les problèmes présentés isolément sont peu propres à manifester la force réelle des élèves, je leur propose de développer une théorie qui rentre dans le cercle de leurs études habituelles ; mais alors il est essentiel que l'on recommande aux personnes chargées de la surveillance des compositions de ne laisser aucun livre de mathématiques dans les mains des candidats. » [37]

Les sources relatives aux années 1826 et 1828, pour lesquelles le sujet était d'une nature différente, viennent confirmer cette conclusion. En 1826, les candidats n'ont pas été réellement évalués sur la seconde question, plus difficile, puisque seul l'un d'entre eux y a répondu. En 1828, en revanche, Delisle précise :

37 Archives nationales, F/17/4173.

« J'ai dû faire entrer inégalement dans la balance des deux questions, parce que la première, toujours développée avec soins dans les cours, ne pouvait manquer d'être bien traitée par des sujets intelligents et laborieux, tandis que la seconde consistait en la solution d'un problème qui pouvait échapper à l'élève le plus distingué, ou fut-ce par une faute de calcul (exemple : Mermet) ». [38]

Or, Delisle, à la différence de Leroy, a fourni une évaluation individuelle des copies en sus du classement. On peut y voir que le candidat Mermet, qui a donné une réponse jugée très satisfaisante à la question 1, est classé devant des candidats comme Petitbon ou Garnier, qui sont parvenus à résoudre le problème de la question 2 correctement, mais qui ont commis des erreurs à la première question. [39] La « balance » du correcteur penche donc vers l'exercice qui met en valeur les connaissances de l'élève, et non vers celui qui mesure sa capacité de réflexion.

On peut se demander, dans ce contexte, quels sont les critères selon lesquels est effectué le classement des candidats. Il faut noter, tout d'abord, que les correcteurs ne raisonnent pas en termes d'évaluation chiffrée ou de barème. En effet, le compte-rendu global de l'épreuve de mathématiques que Leroy envoie au ministre nous apprend :

« Parmi les 24 compositions, il y en a beaucoup dont les défauts et les mérites se balancent mutuellement. Les 7 dernières sont trop défectueuses ou incomplètes pour être classées. Les n^os^ 15, 16 et 17 sont encore fort médiocres mais les copies antérieures, quoique offrant des erreurs de calcul ou des développements incomplets, annoncent des connaissances suffisantes pour profiter des cours de l'École. Les copies 1, 2, 3 et 4 se distinguent par des raisonnements bien suivis ». [40]

De même, en 1826, Leroy distingue une copie où la solution fournie est « rigoureuse et très élégante » ; en 1828, Delisle déplore, dans certaines copies que les calculs, bien que corrects et fournissant le bon résultat, soient « mal conduits », ou encore « peu élégants ». On le voit, les appréciations ne tiennent pas seulement compte de l'exactitude des démonstrations

38 Lettre de Delisle, Archives nationales, F/17/4175.

39 Appréciations individuelles des copies de 1828, Archives nationales, F/17/4174.

40 Archives nationales, F/17/4174.

et des calculs. Elles ont également une importante dimension subjective, ce qui laisse supposer que l'on n'attend pas seulement du candidat qu'il fournisse une réponse correcte d'un point de vue mathématique, mais également que cette réponse soit une « bonne » démonstration, c'est-à-dire qu'elle soit conforme aux exigences du correcteur.

La consultation conjointe des copies et du classement, à laquelle on peut ajouter, pour 1828, les appréciations de Delisle, nous renseigne ici sur ces attentes. Outre le fait d'avoir traité des deux questions et d'avoir rédigé une démonstration pour chacune d'entre elles, l'exhaustivité de la réponse paraît être un facteur important. En effet, les candidats qui ont fourni les réponses les plus complètes, c'est-à-dire au-delà de ce qu'exige strictement le sujet, furent valorisés. Par exemple, alors que le sujet de 1829 stipule, sans plus de précisions, qu'il faut donner une méthode pour obtenir les limites supérieures et inférieures, une grande partie des candidats a fourni deux méthodes, et ceux qui se sont arrêtés à la première sans chercher à améliorer le résultat se retrouvent en bas du classement. Pour ce qui est de la deuxième question, on peut remarquer que les candidats qui ont soit expliqué le principe d'une asymptote à une courbe avant de commencer la démonstration, soit donné deux méthodes dans le cas du second degré arrivent en tête. De même, pour l'épreuve de 1828, les deux premiers sont ceux qui ont présenté, outre la méthode arithmétique commune à toutes les copies, une seconde méthode fondée sur la décomposition des polynômes. Les commentaires des correcteurs vont également dans ce sens : la présence de cette seconde méthode est explicitement mentionnée dans l'appréciation de Delisle et, on l'a vu, le caractère incomplet de certaines copies est un reproche qui revient par deux fois dans le commentaire de Leroy sur l'épreuve de 1829.

Il y a donc là une règle implicite, mais que connaissent les candidats (Galois y compris) selon laquelle il convient d'en dire le plus possible sur le sujet demandé, même si cela n'est pas expressément formulé dans la question. Ainsi, les élèves partagent non seulement des savoirs, mais également une façon de répondre à une question de mathématiques. Celle-ci consiste à montrer que l'on est capable de restituer clairement toutes les connaissances et les raisonnements que l'on a appris sur un sujet. Le fait que la plupart des questions posées ne mettent pas les élèves en situation de prendre des initiatives tend d'ailleurs à confirmer cette conclusion. En organisant l'essentiel de l'épreuve du concours autour de restitutions de connaissances, l'École préparatoire ne cherche pas à recruter de futurs chercheurs, mais de bons praticiens qui disposent d'une culture mathématique importante.

Néanmoins, en 1830, Évariste Galois n'est plus simplement un praticien des mathématiques, il en est déjà un producteur, qui travaille depuis plus d'un an sur la question de la résolubilité des équations par radicaux. [41] Or, les sujets du concours de l'École préparatoire montrent que la théorie des équations, loin de se restreindre aux mathématiques savantes, fait partie de la culture commune à l'ensemble du milieu mathématique. En examinant l'enseignement de la résolution des équations, on peut donc espérer inscrire Galois dans une tradition savante, non pas pour reconstituer une filiation entre ses travaux et d'autres textes fondateurs de la théorie des équations qui privilégierait la cohérence formelle des raisonnements, mais pour comprendre quels sont les matériaux à partir desquels Galois raisonne et selon lesquels ses contemporains le lisent.

5. LES RECHERCHES DE GALOIS ET L'ALGÈBRE SCOLAIRE

On insiste souvent sur le style résolument « moderne » du travail de Galois sur les équations, sur la concision de sa démarche qui consiste à prévoir les transformations algébriques au lieu de les effectuer, c'est-à-dire, pour reprendre une expression désormais célèbre, à « sauter à pied joint sur les calculs » et à « grouper les opérations ». [42] Il y aurait donc un décalage entre sa façon de faire des mathématiques et les pratiques contemporaines, qui lui aurait valu le refus de l'Académie des sciences.

---

41 Le premier mémoire de Galois a été déposé à l'Académie des Sciences le 25 mai 1829.

42 Voir la préface, due à J. Dieudonné, de l'ouvrage [Galois 1962, p. 9]. La modernité de la démarche algébrique de Galois est souvent mise en avant. Voir en particulier : [Connes et al. 2000, notamment pp. 35-38] ; [Patras 2001, notamment pp. 62-66] ; [Michel 2003].

Néanmoins, la réception de Galois, de même que le caractère novateur attribué à ses recherches, est historiquement située et ne peut donc être abordée que relativement aux savoirs et pratiques partagés par l'ensemble du milieu mathématique français au cours du premier XIX^{e} siècle. En effet, ce qu'un lecteur comprend d'un texte dépend de ce qu'il connaît du sujet, mais aussi de ce qu'il considère comme important au moment où il le lit. [43] À travers la scolarité d'Évariste Galois se pose ainsi la question de l'hétérodoxie du travail de ce mathématicien par rapport à l'habitus disciplinaire lié à la théorie des équations au début du XIX^{e} siècle.

Plusieurs types de sources peuvent être mobilisés pour cerner cet objet. D'abord, les programmes du concours et des enseignements à l'École polytechnique indiquent les contenus que les élèves sont théoriquement tenus de maîtriser à un niveau d'étude donné. Ces documents nous ont semblé représentatifs, dans la mesure où la publication du programme du concours a contribué à uniformiser les enseignements dès la fin de l'Ancien Régime [44], et où les lecteurs auxquels s'adressait Galois, c'est-à-dire les Académiciens, étaient alors pour la plupart issus de cette institution. Ils nous apprennent que la théorie des polynômes, la résolution algébrique, certaines méthodes de résolution numérique et l'étude des polynômes cyclotomiques font partie des connaissances nécessaires à tout apprenti mathématicien. [45]

Une source complémentaire permet de préciser ce tableau, en donnant accès aux contenus qui font effectivement l'objet d'un apprentissage, au-delà des consignes officielles : on trouve, dans le dossier du candidat à l'École préparatoire pour l'année 1828 Christophe Mermet, une lettre de recommandation de son professeur de mathématiques au collège Sainte-Barbe, qui indique les enseignements que cet élève y a suivis. [46] Concernant l'algèbre, Mermet maîtrise donc, outre « les matières pour l'admission à l'École polytechnique » :

43 Sur la question des lectures d'un texte mathématique, voir [Goldstein 1995].
44 Voir [Belhoste 1989].
45 Voir [Belhoste 1995, pp. 73-77].
46 Archives nationales, F/17/4170.

> « le binôme (avec exposant quelconque), (...) les fonctions symétriques des racines des équations, la recherche des racines imaginaires, du degré de l'équation finale dans l'équation réciproque, les équations binômes ».

Cet élève, qui est dans une situation scolaire similaire à celle de Galois, puisqu'ils sont tous deux en classes préparatoires, a donc des connaissances plus étendues que ce que les programmes laissent supposer. En l'absence d'informations complémentaires, il est difficile d'évaluer le « niveau » réel de Mermet par rapport à celui de Galois. Il est certain, en revanche, que ces deux étudiants fréquentent les mêmes lieux d'apprentissage et se fixent les mêmes objectifs. De plus, en termes de contenus mathématiques, tous deux disposent des compétences nécessaires à la compréhension de la théorie algébrique de Lagrange, que Galois a utilisée dans ses recherches.

Il ne suffit pas pour lire un texte mathématique de connaître les concepts qui y interviennent ; encore faut-il être capable d'y reconnaître leur usage et de les manipuler de la même manière que l'auteur. L'outillage mental mis en œuvre, loin de se limiter aux contenus des mathématiques, englobe un ensemble de savoir-faire nécessaires à l'intelligence des textes.[47] Pour accéder aux pratiques attachées aux contenus mathématiques, nous avons mobilisé une dernière source, de type différent des deux précédentes : les manuels d'algèbre de Lacroix offrent ici un éclairage plus concret sur l'étendue de ces connaissances, ainsi que sur les compétences et savoir-faire qui leur sont associés ([Lacroix 1807] et [Lacroix 1822]).

Ces ouvrages, en tant que manuels scolaires, nous renseignent non seulement sur les connaissances à transmettre, mais aussi sur la délimitation du domaine abordé, sur l'ordre et la façon de présenter les savoirs puis de les réinvestir à travers des exemples ou des applications.[48] On

47 Notre réflexion s'appuie ici sur l'ouvrage [Perrot 1992].

48 Le choix de cet ouvrage, parmi la masse des manuels disponibles, est motivé par son succès et sa longévité. Son étude étant recommandée par les programmes des lycées jusqu'en 1821, il nous semble raisonnable d'étendre son influence jusqu'en 1830. Le manuel de Bézout présente les mêmes caractéristiques, mais il a été rédigé à une période plus ancienne, et demeure plus élémentaire. La comparaison des deux ouvrages ouvre cependant des perspectives intéressantes quant aux évolutions de l'enseignement de l'algèbre. Pour plus de détails voir la thèse [Ehrhardt 2007].

y trouve tous les grands thèmes abordés par la recherche algébrique du XVIIIe siècle (fractions rationnelles, systèmes d'équations, binôme de Newton, polynômes et résolutions d'équations polynomiales), ainsi que des développements plus récents. Lacroix cite ainsi les leçons de Laplace à l'École normale de l'an III et le traité de Lagrange (1795) sur la résolution numérique des équations (1798). Dans la troisième édition des *Compléments d'algèbre*, parue en 1804, il reprend également quelques résultats des *Disquisitiones Arithmeticæ* de Gauss parues en 1801 et qui n'étaient pas encore traduites en français. De fait, l'ensemble de la théorie des équations est connu des élèves de mathématiques transcendantes. Lacroix fournit également une compilation de résultats liés à la résolution pratique d'équations particulières : méthode d'extraction de racines, exemples où l'on parvient à abaisser le degré d'une équation quand on connaît une relation entre les racines, théorème des valeurs intermédiaires et résolution numérique par substitutions successives (méthode de Lagrange), règle de Descartes sur le nombre de racines réelles et imaginaires. Concernant la résolution générale, Lacroix fait sienne la conclusion de Lagrange :

> « S'il faut renoncer à obtenir, par un nombre limité d'opérations algébriques généralement indiquées, les racines d'une équation quelconque au moyen de ses coefficients, on doit y avoir d'autant moins de regret que la forme de ces expressions en rend l'application numérique toujours très longue et quelquefois impossible. »

Ainsi, même si les applications à des cas concrets ne concernent que la partie la plus élémentaire du cours, l'algèbre reste pour Lacroix associée à la résolution de problèmes et il convient d'obtenir effectivement les solutions des équations que l'on étudie. Au-delà des savoirs, ce manuel met donc l'accent sur les savoir-faire attachés à la théorie des équations : il s'agit, avant tout, de parvenir à la solution de problèmes concrets et l'accent est mis sur la manière d'y parvenir par le calcul. Par exemple, le manuel de Lacroix présente plusieurs méthodes de résolution des équations de degré 3 et 4, et s'avère très attentif aux aspects concrets de la théorie, à travers la résolution numérique et les différentes techniques d'abaissement du degré. Il ne suffit donc pas de connaître les différents résultats théoriques, mais d'être capable de mettre en œuvre une panoplie de procédés concrets. L'habitus disciplinaire algébrique apparaît chez Lacroix autant comme une théorie que comme une pratique de calculs, l'objectif premier étant d'obtenir des résultats numériques. [49]

L'épreuve de mathématiques du concours de l'École préparatoire permet de mettre cette conclusion à l'épreuve de la réalité concrète des pratiques des élèves. En effet, comme nous l'avons vu, la « qualité » des calculs algébriques est un critère que prenaient en compte les correcteurs, et les questions d'algèbre accordent une place importante aux applications numériques des résultats théoriques que l'élève devait démontrer. En outre, cette préoccupation se retrouve dans le souci qu'ont les candidats de 1828 et 1829 d'apporter la réponse la plus complète possible : il s'agit, en 1829, d'obtenir une valeur plus précise de la limite supérieure des racines et, en 1828, de restreindre les étapes du procédé algorithmique permettant d'obtenir les racines entières d'une équation à coefficients entiers. Dans un cas comme dans l'autre, donc, les précisions apportées à la théorie sont mises au service de l'exigence calculatoire.

Il convient maintenant d'évoquer brièvement la question de la transposition de cet habitus scolaire dans les mathématiques savantes. En effet, l'examen de rapports de l'Académie des sciences sur des mémoires relatifs à la théorie des équations montre que cette conception de l'algèbre, loin de se cantonner aux salles de classes, s'étend aux pratiques quotidiennes des chercheurs en mathématiques qui abordent la théorie des équations. [50] Lorsque Rochat propose une nouvelle méthode, d'ailleurs erronée, pour l'équation du troisième degré, c'est avec « une analyse assez

49 Dans une lettre rédigée entre 1804 et 1810, Lacroix écrit : « J'examine donc toute découverte analytique relativement aux espérances qu'elle peut donner pour l'avancement des sciences physico-mathématiques ». Nous citons d'après [Lamandé 2004, p. 57].

50 Les exemples cités sont bien antérieurs aux années 1830. De fait, nous n'avons trouvé aucun rapport sur ce thème dans les *Procès-verbaux* plus récents. Pour plus de détails sur la théorie des équations en tant que pratique mathématique savante, voir [Ehrhardt 2007].

spécieuse » et un calcul « conduit avec adresse ».[51] Dubourguet, en cherchant à déterminer le nombre et le signe des racines réelles de certaines classes d'équations, s'appuie sur des considérations géométriques : « il remplace chaque équation [...] par deux autres équations à deux variables qu'il construit au moyen de courbes et, en discutant le cours de ces lignes dans chaque cas, il détermine le nombre de leurs intersections et par conséquent des racines réelles de la proposée ».[52] La méthode de résolution numérique de Budan de Boislaurent, quant à elle, est fondée sur « un procédé particulier pour transformer une équation proposée dont l'inconnue est x en une suite d'équations, dont les inconnues seraient $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$ et ce procédé [...] avait paru propre à faciliter les transformations dont il s'agit en évitant les multiplications des coefficients de l'équation proposée par les coefficients des puissances du binôme ».[53] La pratique savante rejoint donc ici la pratique scolaire : au début du XIXe siècle, travailler sur la théorie des équations consiste avant tout à exposer une méthode de calcul des racines, sa valeur étant jugée sur son efficacité par rapport à celles que l'on connaît déjà.

Or Galois, tout novateur qu'il soit, inscrit sa pratique dans cette orthodoxie mathématique. En effet, la copie qu'il a rédigée pour le concours de l'École préparatoire montre qu'il connaît les attentes des correcteurs en matière d'algèbre scolaire puisqu'il s'efforce, comme ses camarades, de trouver la valeur la plus précise possible de la limite supérieure. Il va même jusqu'à comparer l'efficacité des deux méthodes qu'il présente, dans le cas de l'équation particulière donnée. Il n'ignore pas davantage cette pratique dans son travail de recherche, puisqu'il aborde la question de l'applicabilité des résultats qu'il propose et s'efforce de donner des exemples dans le cours des raisonnements. Il sait d'ailleurs que c'est un point faible de son premier mémoire sur les équations, qui le rend « étrange à la plupart des

51 Rapport de Legendre, *Procès-verbaux des séances de l'Académie des sciences*, séance du 21 brumaire an XIII, t. 2, p. 151.

52 Rapport de Poisson, *Procès-verbaux des séances de l'Académie des sciences*, séance du 17 mai 1813, t. 5, p. 211-212.

53 Rapport de Legendre, *Procès-verbaux des séances de l'Académie des sciences*, séance du 8 brumaire an XII, t. 2, p. 21-23.

lecteurs ». [54] En outre, la doctrine qu'il baptise « l'analyse de l'analyse » relève également de la dialectique théorie-applications, mais en se plaçant à un degré d'abstraction supérieur : il s'agit, finalement, d'appliquer des résultats théoriques généraux pour obtenir des résultats théoriques plus particuliers. De fait, les mathématiques de Galois ne sont pas totalement étrangères aux préoccupations de son temps, puisque Galois est détenteur, par sa formation, de l'habitus algébrique de son époque.

Les mathématiques scolaires ont longtemps constitué l'un des parents pauvres de l'histoire des sciences. [55] Si des études récentes et fort bien documentées se sont tournées vers le fonctionnement des institutions ou l'étude des manuels, aucune ne place l'élève au centre de l'analyse. [56] Le cas d'Évariste Galois offre le double avantage de permettre, dans une démarche inspirée des principes de la micro-histoire [57], de décrypter les pratiques concrètes d'apprentissage et les possibilités effectives qui s'offraient aux étudiants, tout en mettant en lumière le lien organique tissé entre la formation scolaire et le savoir-faire savant. Les variations d'échelles qu'autorise la confrontation, à travers le cas d'un acteur individuel, de ces deux aspects de la pratique mathématique permettent ainsi de mettre au jour les rouages sociaux et culturels d'une tradition mathématique. L'intérêt de ces sources scolaires ne réside donc pas seulement dans la célébrité de l'acteur choisi, mais aussi, et peut-être même davantage, dans ce qu'elles nous apprennent sur les mathématiques en tant que travail intellectuel socialement organisé.

54 Voir la préface de [Galois 1962, p. 11]. A ce sujet, voir aussi [Galuzzi 2001].

55 Sur ces questions voir [Belhoste 1998].

56 L'École polytechnique a fait l'objet de nombreuses études, parmi lesquelles on peut citer [Belhoste 2003]. Sur l'École normale, [Zwerling 1990]. Sur les manuels et la culture scolaire, [Lamandé 1987] et [Schubring 1992].

57 Pour une réflexion historiographique sur la micro-histoire [Revel 1996].

APPENDICE

LES DOCUMENTS

1. Le sujet

1) Exposer, sur une équation de degré quelconque, le moyen d'obtenir :

1) une limite supérieure des racines positives

2) une limite inférieure des racines négatives, c'est-à-dire un nombre plus grand *numériquement* que toutes les racines de ce dernier genre.

Puis appliquer ce résultat à l'équation suivante que l'on débarrassera d'abord de tout dénominateur :

$$\frac{x^3-12}{x^2-2}=\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x^2-2}.$$

2) Exposer sur l'équation générale des courbes du second degré la méthode qui sert à trouver les asymptotes, directement et sans avoir besoin d'effectuer une transformation de coordonnées. On appliquera ensuite cette méthode à la courbe :

$$y^2+3x^2-4xy+x+2y-1,$$

dont il faudra d'ailleurs construire les lignes ou points remarquables tels le centre, les diamètres, les axes, etc.

2. La copie d'Évariste Galois au concours d'entrée de l'École préparatoire (1829)

1re question

1re MÉTHODE

Soit $Ex=0$ l'équation pour laquelle on demande la limite supérieure K des racines, et dans laquelle nous supposerons pour plus de simplicité le plus haut terme positif. Comme l'hypothèse $x=+\infty$ donne pour résultat $Ex>0$, et qu'aucune racine ne doit être comprise entre $+\infty$ et une limite supérieure des racines, il s'ensuit que toute limite supérieure des racines substituée dans l'équation doit donner un résultat positif. Mais K étant une limite, $K+z$ (z étant positif) en est encore une. Donc $E(K+z)$ doit être positif pour toute valeur positive de z. Et réciproquement, si $E(K+z)$ est positif pour toute valeur positive de z, K sera limite. Car aucune valeur supérieure à K n'annulera Ex.

Il faut donc et il suffit que pour toute valeur positive de z, on ait $E(K+z)$ ou bien

$$EK + E'Kz + \frac{1}{2}E''Kz^2 + \frac{1}{2\cdot 3}E'''Kz^3 + \cdots$$

positif. Et cette condition sera évidemment remplie, si l'on suppose que tous les coefficients de z dans cette fonction soient positifs.

Ainsi, on n'a qu'à résoudre le système d'inégalités

$$EK > 0, \quad E'K > 0, \quad E''K > 0, \ldots, E^{(m-1)}K > 0.$$

Pour cela, on cherchera le plus petit nombre entier qui satisfasse à la dernière, puis le plus petit nombre entier qui satisfasse à la fois aux deux dernières, puis aux trois dernières, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait le plus petit nombre qui rende tous ces termes positifs. Arrivé à ce nombre, on aura la limite supérieure cherchée.

Si l'on demandait au contraire la limite inférieure ℓ des racines, on ferait dans Ex $x = -y$, on chercherait la limite supérieure K des racines de l'équation $E(-y) = 0$, et l'on ferait $\ell = -K$, et comme K est plus grand que toutes les valeurs de y, il s'ensuit que $-K$ ou ℓ est plus petit que toutes les valeurs de $-y$ ou de x.

On peut présenter cette règle, appelée méthode de Newton, d'une manière un peu plus simple.

Puisque K est plus grand et ℓ plus petit que toutes les racines de l'équation $Ex = 0$, il faudra que l'équation en z, $E(K+z) = 0$ n'ait pas de racine > 0, sans quoi $Ex = 0$ aurait une racine $> K$; et de même, que l'équation en z $E(l + z) = 0$ n'ait pas de racine < 0, sans quoi $Ex = 0$ aurait des racines $< \ell$. Les conditions à exprimer sont donc que $E(K + z) = 0$ n'ait pas de racine positive, et que $E(\ell + z) = 0$ n'en ait pas de négatives. Il suffit pour cela que la première n'ait que des permanences, et la seconde, que des variations de signe. C'est [ce] qui donnera encore deux systèmes d'inégalités à résoudre dont l'un donnera K et l'autre ℓ.

2e MÉTHODE

La 1re méthode donne en général des approximations assez sures, mais on voit qu'elle est longue et pénible dans la pratique. En voici une plus expéditive.

Soit m le degré de l'équation, $n+1$ le rang du premier terme négatif, N le plus grand des coefficients des termes négatifs, pris positivement, en sorte que l'équation débarrassée des coefficients fractionnaires soit de la forme

$$(1) \qquad x^m + \cdots + Hx^{m-n+1} + Kx^{m-n} \cdots - Nx^p \cdots = Ex = 0$$

Il s'agit d'abord de trouver un nombre positif qui donne dans ce polynôme un résultat positif ainsi que tout nombre plus grand. Or l'inégalité $Ex > 0$ est évidemment satisfaite par toute solution positive de l'inégalité

$$(2) \qquad x^m - Nx^{m-n} - Nx^{m-n-1} - \cdots - Nx - N > 0$$

savoir $x^m - N\frac{x^{m-n+1}-1}{x-1} > 0$. Cette inégalité n'étant pas satisfaite en général par 1, la marche que nous suivons ne peut nous faire espérer de limite < 0 [*??*]

⋮

[*plusieurs lignes biffées*]

⋮

Nous supposerons donc dans l'équation (2), $x-1$ positif et nous pourrons faire disparaître le dénominateur : elle deviendra, en faisant passer N dans l'autre membre,

$$(3) \qquad x^m(x-1) - Nx^{m-n+1} > N$$

Inégalité qui sera satisfaite par toute solution de l'inégalité

$$x^m(x-1) - Nx^{m-n+1} > 0 \quad \text{ou} \quad x^{n-1} - N > 0.$$

Et cette dernière sera satisfaite tant que $(x-1)^n - N$ ne sera pas < 0, savoir quand $x =$ ou $> 1 + \sqrt{N}$. Donc $1 + \sqrt{N}$ est une limite supérieure des racines de l'équation (1).

Si l'on demandait la limite inférieure, on ferait la transformation indiquée ci-dessus et l'on en déduirait cette règle :

N étant le plus grand des termes négatifs de rang impair et positif de rang pair, pris positifs, et $n+1$ étant le moindre des rangs de ces termes, $1+\sqrt[n]{N}$ sera, en signe contraire, la limite inférieure cherchée.

Exemple

On a l'équation

$$x^3 - \frac{12}{x^2-2} = \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^2-2}.$$

Elle devient, multipliant par $x^2(x^2-2)$ et ordonnant

$$x^7 - 2x^5 - 4x^3 - 12x^2 + 8x - 6 = 0.$$

Si l'on demande la limite supérieure des racines de cette équation, et que l'on emploie d'abord la première méthode, on cherchera d'abord les coefficients de z dans $E(K+z)$, on supposera tous ces coefficients positifs et remontant des dernières inégalités aux premières, on aura le plus petit nombre qui les satisfait toutes.

Voici le type des calculs

$$\begin{array}{ll}
x^7 - 2x^5 - 4x^3 - 12x^2 + 8x - 6 & 3 \\
7x^6 - 10x^4 - 12x^2 - 24x + 8 & 2 \\
21x^5 - 20x^3 - 12x - 12 & 2 \\
35x^4 - 20x^2 - 4 & 1 \\
35x^3 - 10x & 1 \\
21x^2 - 2 & 1
\end{array}$$

3 est donc la limite supérieure demandée. Dans cet exemple, c'est la limite entière la plus approchée car 2 donne un résultat négatif dans l'équation.

L'autre méthode donnerait pour limite $1+\sqrt{12}$, qui est entre 4 et 5, et est, comme on le voit, moins approchée.

Occupons nous de la limite inférieure et faisons pour cela $x = -y$, l'équation devient

$$x^7 - 2x^5 - 4x^3 + 12x^2 + 8x + 6 = 0.$$

La première méthode donnera le résultat suivant :

$x^7 - 2x^5 - 4x^3 - 12x^2 + 8x - 6$	2
$7x^6 - 10x^4 - 12x^2 - 24x + 8$	2
$21x^5 - 20x^3 - 12x - 12$	1
$35x^4 - 20x^2 - 4$	1
$35x^3 - 10x$	1
$21x^2 - 2$	1

-2 est donc la limite cherchée. La seconde méthode donne $-(1+\sqrt{4})$ ou $-?$ qui est encore moins approchée.

L'équation $x^7 - 2x^5 - 4x^3 - 12x^2 + 8x - 6 = 0$ n'ayant, si l'on veut, que deux permanences aura tout au plus deux racines entre -2 et 0 ; n'ayant de même que trois variations, elle aura tout au plus trois racines positives.

2^{re} question. Des asymptotes

Une asymptote d'une courbe est une droite qui s'approche indéfiniment d'une courbe et se confond avec elle à l'infini. Cherchons, d'après cela, une règle pour déterminer les asymptotes d'une courbe donnée.

Supposons d'abord que l'équation de la courbe soit du m-ième degré, et de la forme :

$$T_m + T_{m-1} + T_{m-2} + \cdots = 0 \tag{1}$$

T_m, T_{m-1} etc., étant des fonctions homogènes de x et y dont l'indice marque le degré. Soit $y = ax + b$ (2) une asymptote de cette courbe (Nous supposons que l'asymptote ne soit pas parallèle à l'axe des y, parce qu'on peut éviter ce cas en changeant partout y en x).

Si l'on divise l'équation (1) par x^m, l'équation (2) par x, et qu'on y suppose x infini, elles se réduisent à $\frac{1}{x^m}T^m = 0$, $\frac{y}{x} = a$. Or, pour que les deux lignes se confondent en l'infini, il faut évidemment que leurs équations aient lieu en même temps, c'est à dire que a doit être une racine de l'équation en $\frac{y}{x}$, $\frac{1}{x^m}T_m = Q\left(\frac{y}{x}\right)$ en d'autres termes $y - ax$ doit être un diviseur de T_m. C'est la première condition pour que la droite $y-ax$ soit une asymptote de la courbe (1).

Soit donc $T_m = (y - ax) \times Q$, et mettons l'équation (1) sous la forme

$$(y - ax)Q + T_{m-1} + T_{m-2} + \cdots = 0$$

Si on divise cette équation par x^{m-1} et que l'on y suppose x infini, elle se réduit à $(y - ax) \times \frac{Q}{x^{m-1}} + \frac{1}{x^{m-1}}T_{m-1} = 0$. Mais $\frac{Q}{x^{m-1}}$ et $\frac{1}{x^{m-1}}T_{m-1}$ sont des fonctions entières de $\frac{y}{x}$ ou de a, et ces fonctions ne sont autre chose que ce que donnent Q et T_{m-1} quand on fait $x = 1$, $y = a$. Faisons donc ces substitutions, l'équation ci-dessus donnera $y - ax = -\frac{T_{m-1}}{Q}$. C'est la valeur de b. Cette valeur sera toujours réelle et finie quand a sera nul et qu'il n'y aura pas plusieurs facteurs de T_m égaux à $y - ax$.

Au lieu de substituer dans $\frac{Q}{x^{m-1}}$, a pour $\frac{y}{x}$, on peut prendre la fonction dérivée de $\frac{1}{x^m}T_m$ par rapport à $\frac{y}{x}$ et y substituer a, car Q n'est autre chose que $\frac{\frac{T_m}{x^m}}{\frac{y}{x}-a}$, ce qui devient $\frac{0}{0}$ quand $\frac{y}{x} = a$.

Voici donc la règle générale : soit $y-ax$ un facteur de T_m. Substituez dans T_m pour x, 1, pour y, a, et prenez la dérivée par rapport à a. Substituez dans T_{m-1} pour x, 1, pour y, a. Divisez ce résultat pris en signe contraire par le précédent, et vous aurez la valeur de b.

Nous allons appliquer cette règle générale aux courbes du second degré dont l'équation est :

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

L'on a ici $m = 2, T_2 = Ay^2 + Bxy + Cx^2, T_1 = Dy + Ex$. Les deux facteurs de la forme $y - ax$ dans lesquels se décomposent T_1 sont déterminés par les deux valeurs de a, $a = \frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$. On en déduit par la règle générale, $b = -\frac{Da+E}{2Aa+B}$. Les valeurs de a n'étant réelles que dans le cas où $B^2 - 4AC$ n'est pas < 0, l'ellipse n'a pas d'asymptote. De plus, quand $B^2 - 4AC = 0$, la valeur de b étant infinie, la parabole n'a pas non plus d'asymptote. Dans le cas de l'hyperbole, les valeurs de a étant toujours réelles et les valeurs de b toujours finies, les asymptotes sont réelles et au nombre de deux.

On voit ici, comme dans le cas général, que les asymptotes ne dépendent que des termes du m-ième et $(m - 1)$-ème degrés, c'est-à-dire dans ce cas des termes de dépendants des variables.

Donc l'équation qui représente, dans le cas de l'hyperbole, le système des asymptotes aura les mêmes termes dépendants que l'équation de l'hyperbole. On peut donc obtenir *a priori* cette équation en déterminant le dernier terme de manière que l'équation se décompose en facteurs du premier degré.

On trouvera ainsi l'équation

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + \frac{AE^2 - BDE + CD^2}{4AC - B^2} = 0$$

qui est la forme la plus générale d'un système de deux droites et qui représentera les asymptotes de cette courbe qui ne différera que par des termes indépendants. Cherchant donc les points où ce système coupe les axes, on construira les asymptotes sans avoir à construire de radicaux.

Telle est la marche générale à suivre quand on a l'équation de la courbe. Mais si elle est résolue par rapport à y et que l'on ait

$$y = cx + d \pm m\sqrt{(x-k)^2 + n}.$$

Voici la méthode dont on peut se servir : il vient

$$y = cx + d \pm m(x-k) \pm \frac{P}{x} \pm \frac{Q}{x^2} \cdots$$

Si l'on fait $x = \infty$ dans cette équation, elle devient $y = cx + d \pm m(x-k)$, et représente deux lignes droites qui sont par conséquent les asymptotes de l'hyperbole. On peut faire voir ici que l'asymptote peut s'éloigner aussi peu que l'on veut de l'hyperbole. Soit en effet p une quantité dont doit tout au plus différer les ordonnées des deux lignes, il suffit de poser

$$\frac{P}{x} + \frac{Q}{x^2} + \cdots < p$$

inéquation toujours résoluble.

Exemple

On a l'équation

$$y^2 + 3x^2 - 4xy + x + 2y - 1 = 0.$$

On trouve ici $a = 2 \pm 1$, $b = -\frac{2a+1}{2a-4}$. Les deux asymptotes sont donc

$$y = x + \frac{3}{2} \qquad y = 3x - \frac{7}{2}.$$

Ces deux équations multipliées donnent

$$y^2 + 3x^2 - 4xy + x + 2y - \frac{21}{4} = 0.$$

C'est aussi ce que l'on aurait pu trouver par la formule générale donnée ci-dessus.

Enfin, si l'on veut se servir du développement en série, la valeur de y en fonction de x est

$$y = 2x - 1 \pm \sqrt{(x - \frac{5}{2})^2 - \frac{17}{4}}$$

et on en déduit pour les équations des asymptotes $y = 2x - 1 \pm (x - \frac{5}{2})$, ce qui revient à ce que nous avons trouvé.

L'intersection des asymptotes $y = x + \frac{3}{2}$, $y = 3x - \frac{7}{2}$ donnera pour les coordonnées du centre $x = \frac{5}{2}$, $y = 4$.

Si l'on veut avoir un système de diamètres conjugués, il faudra prendre une parallèle à l'axe des y passant par le centre, $y = 4$ et la droite $y = 2x - 1$, qui est la partie de la valeur de y hors du radical. Pour avoir les axes, il suffira de partager également les angles des asymptotes.

RÉFÉRENCES

Sources archivales

Dossiers des élèves de l'École préparatoire. Archives nationales, F/17/4170.

Scolarité des élèves de l'École préparatoire. Archives nationales, F/17/4171.

Concours d'admission à l'École préparatoire pour l'année 1826. Archives nationales, F/17/4172.

Concours d'admission à l'École préparatoire pour l'année 1827. Archives nationales, F/17/4173.

Concours d'admission à l'École préparatoire pour l'année 1828. Archives nationales, F/17/4174.

Concours d'admission à l'École préparatoire pour l'année 1828. Copies des élèves. Archives nationales, F/17/4175.

Concours d'admission à l'École préparatoire pour l'année 1829. Section sciences. Archives nationales, F/17/4176.

Concours d'admission à l'École préparatoire pour l'année 1829. Section lettres. Archives nationales, F/17/4177.

Concours d'admission à l'École préparatoire pour l'année 1830. Archives nationales, F/17/4178.

Sources publiées

ALBERTINI (Pierre)
[1990] Le « développement français » au concours de l'École préparatoire en 1826, *Histoire de l'éducation*, 46 (1990), p. 135–154.

AUFFRAY (Jean-Paul)
[2004] *Évariste, 1811-1832, le roman d'une vie*, Lyon : Aléas, 2004.

BELHOSTE (Bruno)
[1989] Les caractères généraux de l'enseignement secondaire scientifique de la fin de l'Ancien Régime à la Première Guerre mondiale, *Histoire de l'éducation*, 41 (1989), p. 3–45.
[1995] *Les sciences dans l'enseignement secondaire français. Textes officiels, t. 1, 1789-1914,* Institut National de Recherche Pédagogique, Lyon : Éditions Économica, 1995.
[1998] Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques, *Revue d'histoire des mathématiques*, 4 (1998), p. 289–304.
[2003] *La formation d'une technocratie. L'École polytechnique et ses élèves de la Révolution au Second Empire*, Paris : Belin, 2003.

BOURDON (Pierre-Louis-Maris)
[1817] *Élémens d'algèbre*, Paris : Courcier, 1817.
[1825] *Applications de l'algèbre à la géométrie*, Paris : Bachelier, 1825.

CARON (Jean-Claude)
[1991] *Générations romantiques. Les étudiants de Paris et le Quartier latin (1814-1851),* Paris : Armand Colin, 1991.

CHOQUET (Charles) & MAYER (Mathias)
[1832] *Traité élémentaire d'algèbre*, Paris : Bachelier, 1832.

CONNES (Alain), LICHNÉROWICZ (André) & SCHÜTZENBERGER (Marcel Paul)
[2000] *Triangle de pensées, Mathématiques - philosophie - physique*, Paris : Odile Jacob, 2000.

DHOMBRES (Nicole) & DHOMBRES (Jean)
[1989] *Naissance d'un nouveau pouvoir : sciences et savants en France, 1793-1824,* Paris : Payot, 1989.

DUPUY (Paul)
[1992] *La vie d'Évariste Galois*, Paul : Jacques Gabay, 1992.

EHRHARDT (Caroline)
[2007] *Évariste Galois et la théorie des groupes. Fortune et réélaborations (1811-1910),* Thèse, EHESS, 2007.

GALOIS (Évariste)

[1962] *Écrits et mémoires mathématiques. Édition critique intégrale des manuscrits et publications d'Évariste Galois*, Paris : Gauthier-Villars, 1962 ; 2e éd. Paris : Jacques Gabay, 1997.

GALUZZI (Massimo)

[2001] Galois' Note on the Approximative Solution of Numerical Equations (1830), *Archive for History of Exact Sciences*, 56 (2001), p. 29–37.

GOLDSTEIN (Catherine)

[1995] *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*, Saint-Denis : Presses Universitaires de Vincennes, 1995.

LACROIX (Sylvestre François)

[1807] *Élémens d'algèbre à l'usage de l'École centrale des Quatre-nations*, Paris : Vve Courcier, 1807.

[1822] *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et d'applications de l'algèbre à la géométrie*, Paris : Bachelier & Huzard, 1822.

LAMANDÉ (Pierre)

[1987] Les manuels de Bézout, *Rivista di storia della scienza*, 4 (1987), p. 339–375.

[2004] La conception des nombres autour de 1800 en France : l'œuvre didactique de Sylvestre François Lacroix, *Revue d'histoire des mathématiques*, 10 (2004), p. 45–106.

LEFÉBURE DE FOURCY (Louis Étienne)

[1827] *Leçons de géométrie analytique, comprenant la trigonométrie rectiligne et sphérique, les lignes et les surfaces des deux premiers ordres*, Paris : Bachelier, 1827.

MICHEL (Alain)

[2003] Le développement de la théorie des équations algébriques et la conceptualisation du calcul, dans Boniface (Jacqueline), éd., *Calculs et formes. De l'activité mathématique*, Paris : Ellipses, 2003, p. 92–110.

MOULINIER (Pierre)

[2002] *La naissance de l'étudiant moderne au XIXe siècle*, Paris : Belin, 2002.

PATRAS (Frédéric)

[2001] *La pensée mathématique contemporaine*, Paris : PUF, 2001.

PERROT (Jean-Claude)

[1992] Quelques préliminaires à l'intelligence des textes économiques, dans *Une histoire intellectuelle de l'économie politique aux XVIIe et XVIIIe siècles*, Paris : EHESS, 1992, p. 7–60.

REVEL (Jacques), éd.
[1996] *Jeux d'échelles. La micro-analyse à l'expérience*, Paris : Seuil/Gallimard, 1996.

ROTHMANN (Tony)
[1982] Genius and Biographers : the Fictionalization of Évariste Galois, *The American Mathematical Monthly*, 89 (1982), p. 84–106.

SCHUBRING (Gert)
[1992] Sobre la metodología de análisis de libros históricos : Lacroix como autor de libros de texto, *Mathesis*, 8 (1992), p. 273–298.

TANNERY (Jules)
[1895] L'enseignement des mathématiques à l'École, dans Dupuy (Paul), éd., *Le Centenaire de l'École normale, 1795-1895*, Paris : Hachette, 1895, p. 387–394.

TATON (René)
[1971] Sur les relations mathématiques d'Augustin Cauchy et Évariste Galois, *Revue d'histoire des sciences*, 24 (1971), p. 123–148.
[1993] Évariste Galois et ses biographes : de l'histoire aux légendes, *Sciences et techniques en perspective*, 26 (1993), p. 155–172.

TOTI RIGATELLI (Laura)
[1996] *Évariste Galois 1811-1832*, Boston : Birkhäuser, 1996.

VERDIER (Norbert)
[2003] *Évariste Galois, le mathématicien maudit*, Paris : Pour la Science, coll. « Les génies de la science », n° 14, 2003.

ZWERLING (Craig)
[1990] *The Emergence of the École Normale as a Center of Scientific Education in Nineteenth Century France*, New York : Garland, 1990.