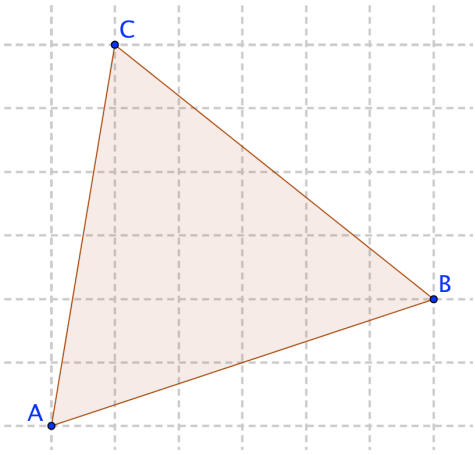
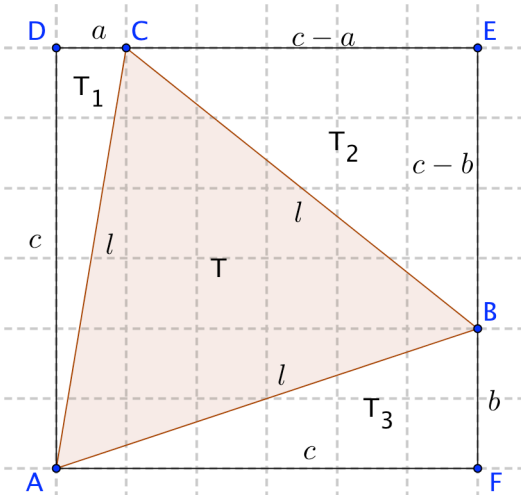
Petite énigme pour élèves du « cours facultatif Euler »

Est-il possible de placer un triangle équilatéral sur un réseau $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ de points (orthonormé), comme dans le croquis ci-dessous.

Si oui comment ? Sinon, pourquoi ?



Démonstration (par 'descente infinie avortée').

- Imaginons que cela soit possible et essayons de prouver que cela entraînerait une contradiction, ce que l'on appelle « une preuve par l'absurde ».
- Comme les coordonnées sont des nombres entiers on peut sélectionner parmi toutes les solutions éventuelles celle dont le côté l du triangle équilatéral T est minimal.
- Inscrivons notre triangle équilatéral T dans un rectangle R.
- Il est évident que les 3 sommets de T ne peuvent pas coïncider avec 3 sommets du rectangle R (Justifier pourquoi).
- De même, il n'est pas possible que 2 sommets de T coïncident avec 2 parmi ceux de R (Justifier pourquoi).
  - Supposons alors qu'un seul sommet A coïncide avec un sommet de R et définissons a, b et c comme dans le croquis ci-contre.
  - Par le théorème de Pythagore $a = b$, puisque T_1 et T_3 ont même hypoténuse et un côté de même longueur c.
  - Par minimalité de la solution T, a et c ne peuvent avoir de diviseur commun d autre que 1. Sinon d diviserait l (par T_1) qui impliquerait que d diviserait $a = b$ et c et donc la solution ne serait pas minimale.
  - Or, par Pythagore sur les triangles T_1 et sur T_2 on $(c-a)^2+(c-a)^2=l^2=a^2+c^2$, qui développée, puis réduite donne $c=4a$. Mais alors l ne serait pas minimal !
  - CARAMBA, belle contradiction avec le choix initial de l.