Exercice 3
Un réseau social compte 2019 membres. Certains de ces membres sont amis l'un avec l'autre, la relation d'amitié étant réciproque. Des événements du type décrit ci-dessous surviennent successivement, l'un après l'autre :

> Soit A, B et C trois membres tels que A soit ami avec B et C, mais que B et C ne soient pas amis ; alors B et C deviennent amis, mais A n'est plus ami ni avec B, ni avec C. Les autres relations d'amitié entre membres ne changent pas durant cet événement.

Initialement, 1010 membres ont 1009 amis chacun, et 1009 membres ont 1010 amis chacun. Démontrer qu'il existe une suite de tels événements à la suite desquels chaque membre aura au plus un ami.

Solution 3
Dans la suite, on assimilera l'ensemble des membres du réseau social aux sommets d'un graphe, et les relations d'amitié aux arêtes de ce graphe. On dira qu'un graphe est *bon* s'il existe une suite d'événements qui le transforme en un graphe dont tous les sommets sont de degré 0 ou 1, et qu'il est *mauvais* sinon.

Une première chose à faire est de s'intéresser aux invariants que conservent les événements mentionnés dans l'énoncé. Ici, le nombre de relations d'amitié diminue de 1, et les degrés des sommets A, B et C varient de -2, 0 et 0 : leur parité reste donc inchangée. Une conséquence directe est que, si un graphe ne contient que des sommets de degré pair (et qui ne sont pas tous des sommets isolés), alors il est mauvais. En effet, il restera toujours au moins une arête, donc un sommet de degré pair et non nul.

D'autre part, puisque les sommets A, B et C sont manifestement choisis au sein d'une même composante connexe, un événement ne peut pas conduire à la fusion de deux composantes connexes. Ainsi, il suffit traiter les composantes connexes indépendamment les unes des autres. Compte tenu des remarques déjà formulées, il faudra s'assurer que toutes ces composantes ont un sommet de degré impair.

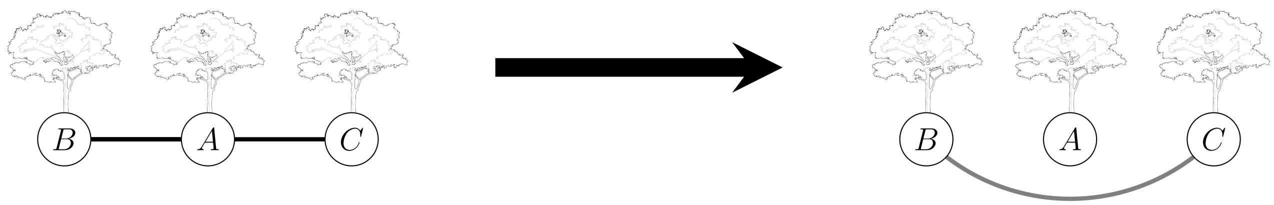
Par ailleurs, ces contraintes sur la parité des degrés n'assurent pas à un graphe d'être bon, puisqu'une clique de taille $k \geqslant 3$ est clairement mauvaise. Ne voyant pas quelles contraintes supplémentaires exiger de la part de notre composante connexe, on dit qu'elle est *acceptable* si ce n'est pas une clique de taille $k \geqslant 3$ et si elle contient au moins un sommet de degré impair, ou s'il s'agit en fait d'un sommet isolé. Nous venons de démontrer que toute bonne composante connexe est acceptable, et on peut espérer que la réciproque est vraie : si on trouve un contre-exemple, il sera toujours temps d'affiner notre notion de composante acceptable.

Tout d'abord, initialement, chaque composante connexe contient au moins 1010 sommets. Puisqu'on a 2019 sommets en tout, le graphe est connexe. Et il contient des sommets de degré impair, donc ce n'est même pas une clique. Notre graphe est donc formé d'une unique composante connexe acceptable.

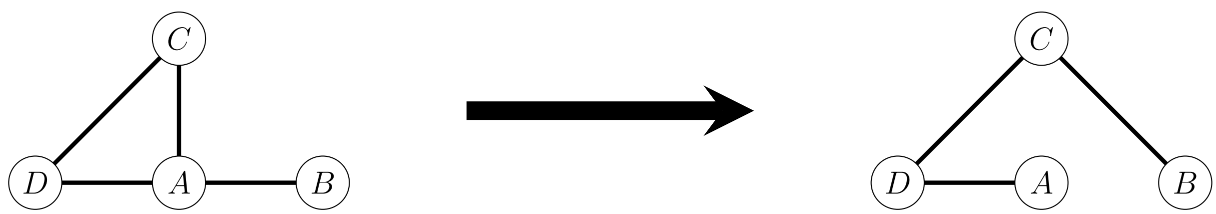
Soit maintenant $\mathcal{C}$ une composante acceptable comportant au moins un sommet de degré 2 ou plus, et montrons qu'on peut la transformer en une nouvelle composante elle aussi acceptable, voire deux composantes acceptables. Pour ce faire, il suffit de ne pas casser la connexité de cette composante, ou de s'assurer que cela ne causera pas de catastrophe.

Tout d'abord, si $\mathcal{C}$ ne contient pas de cycle, c'est un arbre. Si l'on choisit un sommet A de degré

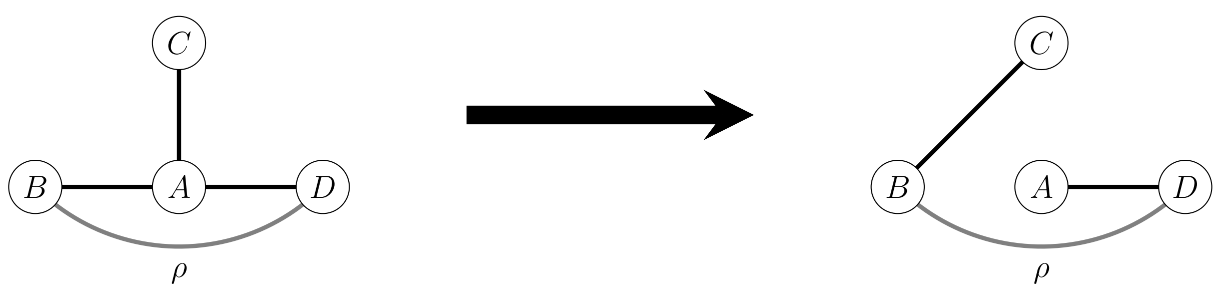
2 ou plus, puis deux voisins B et C de A, ceux-ci ne sont pas amis, et on peut donc appliquer un événement au triplet (A, B, C). Cet événement scinde $\mathcal{C}$ en deux arbres, dont l'un contient A et l'autre contient B et C. Puisque ce sont des arbres, ce sont bien des composantes acceptables.



D'autre part, si $\mathcal{C}$ contient un triangle T, on désigne par K une clique maximale contenant T. Puisque $\mathcal{C}$ est acceptable, elle ne peut pas être égale à K. Il existe donc un sommet B voisin de K mais pas de tous les sommets de K. On considère alors deux sommets A et C de K tels que B soit voisin de A mais pas de C. Puisque K est de taille $k \geqslant 3$, A et C ont un voisin commun, que l'on note D. Par conséquent, en appliquant un événement au triplet (A, B, C), on ne casse pas la connexité de $\mathcal{C}$.



Supposons maintenant que $\mathcal{C}$ contient un cycle mais pas de triangle. Soit A un sommet de degré maximal appartenant à un cycle, et soit B et D les voisins de A le long de ce cycle : on note ρ le chemin qui les relie sans passer par A. Puisque $\mathcal{C}$ lui-même n'est pas un cycle, c'est que $\deg A \geqslant 3$. Ainsi, on peut considérer un autre voisin de A, que l'on note C. Comme $\mathcal{C}$ est sans triangle, B et C ne sont pas voisins. On peut donc appliquer un événement au triplet (A, B, C). Ce faisant, les seules arêtes de $\mathcal{C}$ qui ont disparu sont AB et AC, mais on peut les remplacer par les chemins $AD\,\rho$ et $AD\,\rho\,BC$, de sorte que notre composante reste connexe.



En conclusion, toute composante connexe acceptable peut être réduite en une autre composante connexe acceptable, ou en une forêt (dont toutes les composantes sont acceptables) contenant une arête de moins, ce qui conclut.