

Sea S la suma

$$x + y + z = u + v + w = p + q + r = x + u + p = y + v + q = z + w + r = x + v + r = z + v + p.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} 4S &= (x + v + r) + (z + v + p) + (y + v + q) + (u + v + w) \\ &= (x + y + z) + (u + v + w) + (p + q + r) + 3v \\ &= 3S + 3v. \end{aligned}$$

Luego, $S = 3v$, por lo que $v = S/3$. Denotemos $\ell = v = S/3$, y sean m, n definidos por $m = \ell - x$ y $n = \ell - z$, de modo que

$$x = \ell - m \quad \text{y} \quad z = \ell - n.$$

Puesto que $x + y + z = S = 3\ell$, tenemos $(\ell - m) + y + (\ell - n) = 3\ell$. Por lo tanto,

$$y = \ell + (m + n).$$

Por otra parte, $3\ell = S = y + v + q = [\ell + (m + n)] + \ell + q$, por lo que

$$q = \ell - (m + n).$$

Adems, a partir de $3\ell = S = x + v + r = (\ell - m) + \ell + r$ se deduce

$$r = \ell + m,$$

y de $3\ell = S = z + v + p = (\ell - n) + \ell + p$ se deduce

$$p = \ell + n.$$

Finalmente, de

$$3\ell = S = x + u + p = (\ell - m) + u + (\ell + n)$$

y

$$3\ell = S = z + w + r = (\ell - n) + w + (\ell + m),$$

se deduce

$$u = \ell + m - n \quad \text{y} \quad w = \ell - m + n.$$