Espaces courbes

La notion d’espace courbe a traversé une très longue maturation. Nous en balisons le cheminement historique en évoquant Newton et la courbure des courbes planes (1665), Gauss et la courbure des surfaces (1827), Riemann et les dimensions supérieures (1854), Einstein et la relativité générale (1916), ou Gromov et les espaces discrets (dès 1980). Le lecteur est également invité à repenser à la différence géométrique entre une feuille de salade et une pelure de pomme, voire à spéculer sur la géométrie de la Toile.

Le concept d’ESPACE COURBE sert aujourd’hui à modéliser des réalités très diverses. Il apparaît par exemple dans l’étude des défauts cristallins en physique du solide. Il joue également un rôle important dans des appareils de technologie avancée comme le « Global Positioning System » (GPS), qui permettent déjà de localiser un récepteur GPS à quelques mètres près et qui doivent pour cela prendre en compte des effets complexes de relativité générale, eux-mêmes liés à la courbure de l’espace. Certains projets de recherche sont motivés par la prédiction des tremblements de terre : on souhaite un GPS indiquant des déplacements de l’ordre du millimètre (observation des bords des failles de la croûte terrestre dans les zones sismiques), d’où la nécessité de nouvelles études physico-géométriques pour affiner les connaissances et les performances actuelles.

Au cours de l’effort de structuration de nos connaissances, il a fallu un temps considérable pour dégager diverses notions scientifiques fondamentales sous la forme de concepts précis. C’est par exemple le cas de la température en physique, des éléments en chimie, de l’hérédité en biologie… et, précisément, de la courbure en mathématiques. On peut distinguer trois étapes historiques importantes dans l’évolution de ce que l’on entend par « courbure » ; la troisième étape est d’ailleurs en cours.

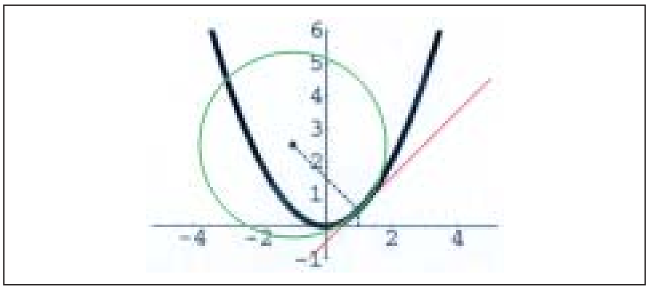

Figure 1

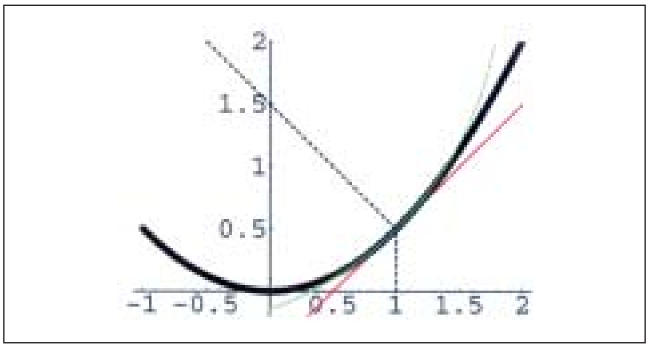

Figure 2

RAYON DE COURBURE D’UNE COURBE EN UN POINT

Les courbes présentent certains aspects *globaux* ; par exemple, une courbe peut être dans un domaine limité de l’espace – c’est le cas d’un cercle – ou, au contraire, avoir des points arbitrairement éloignés – c’est le cas d’une droite. Les courbes présentent aussi des aspects *locaux* ; par exemple, un cercle possède une tangente en tout point, alors que le bord d’un carré possède des points (les coins) où la tangente n’est pas définie. Pour les points où la tangente est bien définie, celle-ci est (par définition !) la meilleure approximation locale de la courbe par une droite (figure 1 et détail à la figure 2).

Mais on peut trouver une approximation à la fois meilleure et encore assez simple : le cercle osculateur en un point P d’une courbe C, qui est le cercle approchant au mieux C près de P (figures 1 et 2). Le rayon de ce cercle est, par définition, le *rayon de courbure* de la courbe C au point P.

Ces notions remontent à un travail de 1665 de Isaac Newton (1642-1727) et ont été repensées par de nombreux mathématiciens.

LE THEOREMA EGREGIUM *(THÉORÈME EXCELLENT)* DE GAUSS ET LA COURBURE INTRINSÈQUE D’UNE SURFACE

En 1827, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) publie un article fondamental qu’il intitule *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (Recherche sur la théorie

– Pierre de la Harpe, Section de mathématiques, Université de Genève, C.P. 240, CH-1211 Genève 24, Suisse. pierredelaharpe@math.unige.ch

générale des surfaces courbes)[1]. Gauss a considérablement précisé ce que l'on peut entendre par « surface » et il a su dégager les notions nécessaires pour leur étude. Il a en particulier défini la *courbure totale* $k(P)$ en un point P d'une surface S et a reconnu que c'est un nombre que l'on peut caractériser de plusieurs manières ; en voici une :

$$k(P) = \frac{12}{\pi} \lim_{r \to 0} \frac{\pi r^2 - \begin{pmatrix}\text{aire dans } S \text{ d'un disque} \\ \text{de rayon } r \text{ autour de } P\end{pmatrix}}{r^4}$$

(comme l'aire dans un plan d'un disque de rayon r est précisément πr^2, cette caractérisation montre immédiatement que la courbure d'un plan est nulle en chacun de ses points) ; en voici une autre :

$$k(P) = \frac{3}{\pi} \lim_{r \to 0} \frac{2\pi r - \begin{pmatrix}\text{périmètre dans } S \text{ d'un dis-} \\ \text{que de rayon } r \text{ autour de } P\end{pmatrix}}{r^3}$$

(ce qui montre autrement que la courbure du plan est nulle en chacun de ses points).

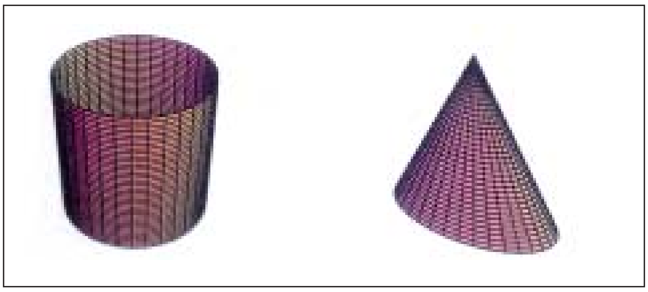

Figure 3 - *Surfaces à courbure nulle : cylindre et cône.*

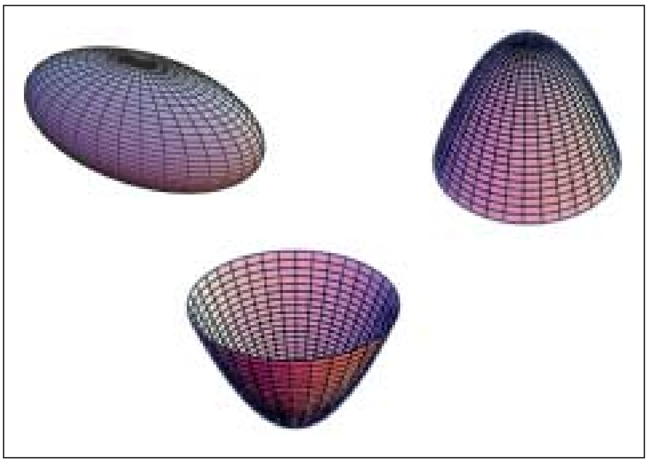

Figure 4 - *Surfaces à courbure positive : ellipsoïde, maximum local, minimum local.*

[1] Anecdote montrant l'interdépendance des recherches dites pures et appliquée : la période où Gauss trouvait certains de ses résultats fondamentaux sur les surfaces est précisément celle où il travaillait sur mandat gouvernemental à des relevés géodésiques dans le royaume de Hanovre.

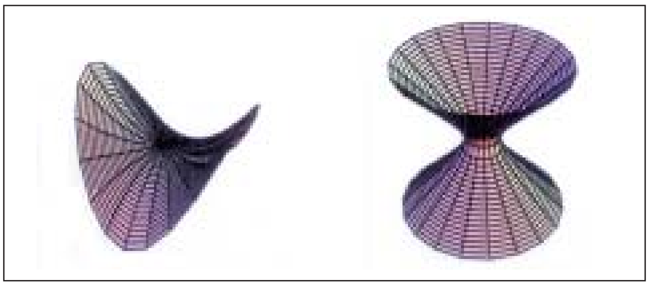

Figure 5 - *Surfaces à courbure négative : col, hyperboloïde à une nappe.*

Il existe de nombreuses manières de mettre en évidence le signe de la courbure. En voici une. Si, dans une surface S, on découpe une étroite bande circulaire et qu'on l'étale sur une surface plane, on obtient une bande circulaire plane *moins* un secteur lorsque S est à courbure positive – c'est le cas avec une pelure de pomme. On obtient au contraire une bande circulaire plane dont l'une des extrémités *empiète* sur l'autre lorsque S est à courbure négative – c'est le cas avec une feuille de salade.

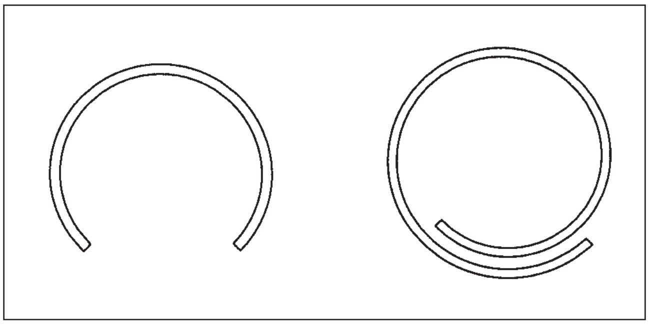

Figure 6 - *A propos de pommes et de salade.*

Gauss et ses successeurs ont aussi mis en place le concept de *géodésique*, qui précise *à la fois* :

(i) la notion de plus court chemin entre deux points d'une surface (en géométrie) ;

(ii) la notion de trajectoire d'un corps pesant dans un champ de forces extérieures (en mécanique).

On assiste ainsi dans la seconde moitié du XIXe siècle à une *géométrisation de la mécanique* qui fut un prérequis important pour les découvertes de la physique quantique et de la relativité au début du XXe siècle. Il faut en particulier signaler les visions extraordinaires de Bernhard Riemann (1826-1866). Son œuvre, d'une extrême concision, a changé toutes les mathématiques. Lors de sa leçon d'habilitation (10 juin 1854), il a révolutionné la géométrie, notamment en l'affranchissant du carcan des petites dimensions (1, 2 et 3), et en étendant à son nouveau cadre les notions de distance et de courbure.

Ces travaux ont été menés en même temps que ceux qui ont résolu la controverse millénaire sur « l'axiome des parallèles » d'Euclide (travaux sur la « géométrie hyperbolique » de Gauss en Allemagne, Lobatchevski en Russie, Bolyai en Allemagne et Hongrie, Beltrami en Italie[2]).

L'APPROPRIATION DU CONCEPT CHEZ EINSTEIN

Dans la théorie de la relativité, dont les premiers articles ont été publiés en 1905 (relativité restreinte) et 1916 (relativité générale) par Albert Einstein (1879-1955), les lois de la physique s'expriment dans un espace « à 4 dimensions » englobant les trois dimensions usuelles et le temps. En relativité générale, la donnée essentielle de l'espace est sa courbure locale, conformément aux définitions de Gauss et Riemann. Einstein s'est magistralement approprié ces notions puisqu'elles lui permettent d'exprimer la masse des particules : la présence de masse se manifeste ainsi par une simple propriété *géométrique* de l'espace courbe qui modélise l'espace-temps (Monastyrsky, 1999).

La relativité, née d'un effort de compréhension théorique, a été vérifiée depuis par de nombreuses expériences.

Sur la courbure et la relativité, on trouve quelques idées remarquablement bien exposées dans deux bandes dessinées de Jean-Pierre Petit (1980 et 1981).

LA NOTION DU SIGNE DE LA COURBURE DANS UN ESPACE DISCRET, LES IDÉES DE GROMOV

Toutes les définitions de courbure évoquées jusqu'ici présupposent une surface ou un espace « continu », et même « lisse » dans un sens à préciser. Mais ce cadre est manifestement trop rigide dans de nombreuses situations : par exemple pour les modèles discrets qu'utilisent de façon constante les ordinateurs (auxquels on ne peut donner qu'un nombre fini d'instructions !). L'extension de la géométrie dans cette direction a été accomplie dans la seconde moitié du XX^e siècle, en particulier par Alexandrov et Gromov (voir par exemple Gromov, 1994).

Ainsi, étant donné un ensemble fini de points dont on ne connaît que les distances mutuelles, on peut aujourd'hui définir des propriétés de courbure telles que « être à courbure strictement négative » ou « être à courbure positive ». (Exemples de tels ensembles finis de points : les adresses du web [Eckmann et Moses, 2002], ou peut-être les gênes du génome si l'on arrive à définir une notion pertinente de distance entre eux.) Ces notions de courbure permettent des analyses qualitatives tout à fait intéressantes de diverses situations : contenu et transmission de très grandes quantités d'information, ou comportements ergodiques et chaotiques, pour ne citer que deux exemples. Il s'agit là de recherches en cours.

[2] Voilà un bel exemple de la perméabilité des frontières aux idées mathématiques.

L'une des définitions récemment proposées utilise l'idée suivante, qui ne définit pas la courbure proprement dite mais seulement son signe : un espace X est à *courbure strictement négative* s'il existe une constante D, caractéristique de l'espace X, telle que pour tout triangle dans X de côtés a, b, c, tout point de a est à distance au plus D d'un point de b ou de c ; on dit alors que les triangles sont D-fins. Dans un tel espace, il peut bien sûr exister des triangles arbitrairement grands (comme en géométrie plane usuelle), mais ces triangles sont néanmoins tous D-fins pour une même valeur de la constante D (il n'y a pas d'équivalent des homothéties de la géométrie usuelle).

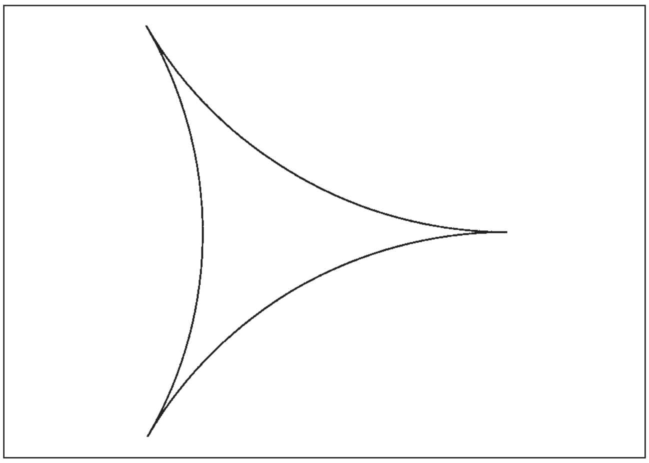

Figure 7 - *Un triangle D-fin.*

L'étude géométrique de diverses structures discrètes en mathématique a fait récemment et fait toujours l'objet de travaux de recherche intensifs, comme en témoignent parmi beaucoup d'autres les livres de Ghys et de la Harpe (1990), Bridson et Haefliger (1999) et de la Harpe (2000).

UN RÉSULTAT DE GROMOV EN THÉORIE DES GROUPES

Pour les lecteurs ayant pratiqué davantage de mathématiques, voici quelques éléments permettant d'énoncer au moins un résultat de Gromov, à titre d'échantillon des progrès spectaculaires qu'il a permis en théorie des groupes.

On considère un groupe G qui est engendré par une famille finie $\{s_1, s_2, \ldots, s_N\}$ d'éléments, au sens où tout élément de G s'écrit d'une manière au moins comme produit de ces « générateurs » s_j et de leurs inverses. Pour deux éléments g, h du groupe G, on définit la *distance* $d(g,h)$ entre g et h comme suit : d'abord $d(g,h) = 0$ si $g = h$; ensuite $d(g,h) = 1$ si $g \neq h$ et s'il existe un générateur s_j tel que $h = gs_j$ ou $h = gs_j^{-1}$; et dans les autres cas $d(g,h) = n$ où n est le plus petit entier tel qu'il existe des éléments $g = g_0, g_1, \ldots, g_n = h$ dans G avec $d(g_0, g_1) = d(g_1, g_2) = \ldots = d(g_{n-1}, g_n) = 1$. Pour g et h dans G, une telle suite $(g = g_0, g_1, \ldots, g_n = h)$ est un *segment géodésique* (penser à « segment de droite ») dans le groupe G. Il est naturel de définir un *triangle* de sommets g, h, k dans G comme la réunion de trois segments géodésiques $(g = g_0, g_1, \ldots, g_n = h)$, $(h = h_0, h_1, \ldots, h_p = k)$ et $(k = k_0, k_1, \ldots, k_q = g)$; les longueurs des côtés d'un tel triangle sont alors n, p et q.

Un groupe G est dit *à courbure strictement négative*, ou *hyperbolique au sens de Gromov* s'il existe une famille génératrice $\{s_1, s_2, \ldots, s_N\}$ et un nombre réel $C > 0$ tels que la propriété suivante soit satisfaite : avec les notations ci-dessus, pour tout triangle de G et pour tout point g_i sur l'un de ses côtés, il existe un point h_j ou k_l sur l'un des *autres* côtés à distance au plus C de g_i (comparer avec la figure 7).

Dans un article déjà célèbre de 1987 et dans d'autres plus récents, Gromov a notamment montré des résultats que nous tentons d'évoquer comme suit.

Théorème. *(i) Presque tous les groupes qui peuvent être engendrés par une famille finie d'éléments sont à courbure strictement négative.*
(ii) Pour $N \geqslant 2$, presque tous les groupes à N générateurs sont de dimension cohomologique 2.

Un tel énoncé utilise des mots dont il faudrait bien sûr préciser soigneusement le sens. Contentons-nous ici de deux commentaires nécessairement bien vagues. Le premier pour dire que l'on peut considérer simultanément tous les groupes du type indiqué dans le théorème (appelés les *groupes de type fini*) et définir sur cet ensemble une structure convenable pour laquelle les mots « presque tous les groupes » de (i) ont un sens mathématiquement précis. Le second pour dire que, outre la courbure, on sait adapter de nombreux concepts géométriques à des objets « discrets » comme les groupes de type fini ; en particulier, un tel groupe a d'abord une « dimension » (que les professionnels qualifient de cohomologique pour des raisons qui leur sont propres) ; et cette dimension est presque toujours exactement 2, comme celle d'une surface, et non pas 1, comme celle d'une droite, ou 6, comme la dimension de l'espace des positions d'un corps solide dans l'espace.

Avant ces travaux, tous les résultats importants de théorie des groupes concernaient telle ou telle famille *particulière* de groupes. Gromov a ouvert une vision globale en ce sens qu'elle concerne la *majorité* des groupes, ce qui a très profondément marqué le sujet. (Gromov et bien sûr d'autres, la recherche mathématique est le fait d'une communauté !)

POUR EN SAVOIR PLUS

Bourguignon (J.-P.), *Espaces courbes*, in « Qu'est-ce que l'univers ? », Université de tous les savoirs, sous la direction d'Y. Michaud, vol. 4, Odile Jacob, 2001, p. 152-163.

Bridson (M.) et Haefliger (A.), *Metric spaces of non-positive curvature*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 319, Springer, 1999.

Einstein (A.), *Die Grundlage der allgemeine Relativitätstheorie*, 1916.

Eckmann (J.-P.) et Moses (E.), *Curvature of co-links uncovers hidden thematic layers in the World Wide Web*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, vol 99:9, 2002, p. 5825-5829 (electronic).

Gauss (C.-F.), *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1827 ; Werke, IV, 1973, p. 217-258.

Ghys (E.) et de la Harpe (P.) (éditeurs), Les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov, Birkhäuser, 1990.

Gromov (M.), *Hyperbolic groups*, in « Essays in Group Theory », S.M. Gersten, Editor, M.S.R.I. Publ. **8**, Springer, 1987, p. 75-263.

Gromov (M.), *Sign and geometric meaning of curvature*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, vol 61, 1994, p. 9-123.

de la Harpe (P.), *Topics in geometric group theory*, University of Chicago Press, 2000.

Monastyrsky (M.), *Riemann, topology, and physics*, Birkhäuser, 2e édition, 1999.

Petit (J.-P.), *Le geometricon*, Les aventures d'Anselme Lanturlu, Librairie Belin, 1980.

Petit (J.-P.), *Le trou noir*, Les aventures d'Anselme Lanturlu, Librairie Belin, 1981.

Riemann (B.), *Ueber die Hypothesen*, welche der Geometrie zu Grunde liegen, leçon d'habilitation, 10 juin 1854 ; Gesammelte mathematische Werke, 2e édition, 1990, p. 304-319.

Stillwell (J.), *Mathematics and its history*, Springer, 1989.

Note de l'auteur
A de minimes modifications près, ce texte est repris d'un document préparé pour une journée « Portes ouvertes » à l'université de Genève, le 10 mars 2001. C'est un plaisir de remercier Boris Ischi qui a composé les figures.