Connaît-on toutes les paires de Golay ?

Écrit par **Shalom Eliahou**

Publié le 21 mars 2023

DOI : 10.60868/vzbt-xh39 — CC BY-NC-ND 4.0

— 15 min ⩽ ⏲ ⩽ 30 min

ARITHMÉTIQUE

Ou comment un problème de spectrométrie infrarouge en 1951 a engendré une conjecture algébrique particulièrement tenace.

Plan de l'article

Lumière infrarouge et berceau du problème

Vous avez sûrement déjà vu l'image d'illustration de cet article : c'est une photo récente de la Nébuleuse de la Carène prise en proche et moyen infrarouge par le tout nouveau *James Webb Space Telescope*, une merveille technologique évoluant depuis janvier 2022 à 1,5 millions de kilomètres de la Terre. Grâce à sa sensibilité exceptionnelle dans le domaine infrarouge, permettant entre autres de voir à travers les nuages de gaz et de poussières, ce télescope a déjà fourni en quelques mois de fonctionnement une moisson d'images stupéfiantes et révélé les galaxies les plus lointaines — et donc les plus anciennes — jamais vues auparavant[1].

Les trésors de science, d'intelligence, d'ingéniosité et d'acrobaties techniques qu'il a fallu déployer pour atteindre un tel niveau de sensibilité font rêver. Pour ne citer que quelques exemples, avant de plonger dans le cœur du sujet mathématique de cet article :

— le spectaculaire miroir principal pliable de 6,5 mètres de diamètre avec sa fine couche d'or et ses 18 segments hexagonaux ajustables ;

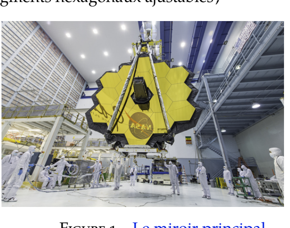

Figure 1 – Le miroir principal

— l'extravagant bouclier thermique pliable de 22 mètres de long et 12 mètres de large, à cinq couches ultraminces en *kapton*, protégeant le télescope spatial de tout rayonnement infrarouge parasite, en particulier en provenance du Soleil, de la Terre et de la Lune ;

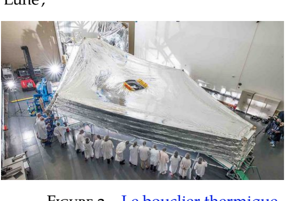

Figure 2 – Le bouclier thermique

— et bien sûr, en beaucoup moins volumineux, mais elles aussi d'une extrême technicité, les caméras *NIRCam* (Near InfraRed Camera)et *MIRI* (Mid-Infrared Instrument) (et divers autres instruments), donnant ces clichés éblouissants et des informations scientifiques inédites et d'une valeur inestimable sur l'univers.

On le voit, le problème de capter et analyser la lumière infrarouge est d'une brûlante actualité. Il est aussi d'une importance cruciale pour de nombreuses autres applications. Ce problème, évidemment ancien, a engendré au cours des décennies toutes sortes d'idées en vue de solutions toujours plus performantes.

C'est dans le cadre de cette quête centenaire qu'est né le problème purement mathématique présenté ici. Il apparaît en filigrane en 1949, puis vraiment en 1951, dans deux articles de Marcel J. E. Golay (1902-1989) proposant de nouvelles méthodes de spectrométrie infrarouge ([4], [5]).

Le système proposé par Marcel J. E. Golay en 1951 comprend deux masques superposés, un pour l'entrée et l'autre pour la sortie de la lumière, avec des fentes verticales percées *à certains endroits*. L'idée clé est de positionner les fentes percées des deux masques suivant deux suites binaires A, B de même longueur n et satisfaisant certaines *conditions algébriques*. Ces conditions ont pour finalité expresse de permettre de séparer le mieux possible les diverses longueurs d'onde de la lumière infrarouge à analyser.

Ainsi sont nées les *paires de Golay*, d'abord appelées *suites complémentaires*. Marcel J. E. Golay lui-même a fait réaliser son nouveau spectromètre infrarouge avec une paire (A, B) de son cru de longueur $n = 80$. Ces paires ont depuis trouvé de nombreuses autres applications, notamment en traitement du signal.

The question

Une question naturelle émerge : outre $n = 80$, quelles sont *toutes* les longueurs possibles des paires de Golay ? Cette question purement mathématique reste ouverte depuis plus de 70 ans. L'objet du présent article est d'exposer ce que l'on sait et ce que l'on conjecture à ce sujet en 2023.

Commençons par définir les notions de *suites binaires*, de leurs *coefficients de corrélation* et des *paires de Golay*.

Définition 1 (Suite binaire). On appelle suite binaire toute suite finie de $+1$ et -1.

Pour alléger, on écrit simplement $+$ pour $+1$ et $-$ pour -1.

Exemple 2 (Exemple de longueur 7) —

$$A = (+1, +1, -1, +1, -1, -1, +1) = + + - + - - +.$$

Certaines suites binaires ont des propriétés mathématiques qui les rendent plus intéressantes ou mieux adaptées selon les applications en vue. Un bon outil pour les comparer entre elles, ce sont leurs coefficients de corrélation[2].

Coefficients de corrélation

Nous avons déjà rencontré ces coefficients dans l'article « Connaît-on toutes les suites de Barker ? » qui contient un petit simulateur interactif dû à Marc Monticelli pour les calculer. N'hésitez pas à le tester ! Mais pour éviter de trop vagabonder dans le cyberespace, rappelons ici même de quoi il s'agit.

Étant donnée une suite binaire $A = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de longueur n, on lui associe $n-1$ coefficients de corrélation notés $c_1(A), c_2(A), \dots, c_{n-1}(A)$. Voyons d'abord ce que sont ces coefficients en longueur $n = 2$, 3 et 4. Le cas général deviendra évident.

— Pour $A = (x_1, x_2)$, son seul coefficient de corrélation est $c_1(A) = x_1x_2$.
— Pour $A = (x_1, x_2, x_3)$, ses deux coefficients de corrélation sont

$$\begin{cases} c_1(A) &=& x_1x_2 + x_2x_3 \\ c_2(A) &=& x_1x_3 \end{cases}$$

— Pour $A = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, ses trois coefficients de corrélation sont

$$\begin{cases} c_1(A) &=& x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 \\ c_2(A) &=& x_1x_3 + x_2x_4 \\ c_3(A) &=& x_1x_4 \end{cases}$$

Dans le cas général $A = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, on définit $c_k(A)$ comme la somme de tous les termes de la forme x_ix_{i+k}. Cela vaut pour tout k entre 1 et $n-1$. En particulier, $c_{n-1}(A) = x_1x_n$. Une formule vaut mieux qu'un long discours :

$$c_k(A) = x_1x_{1+k} + x_2x_{2+k} + \dots + x_{n-k}x_n$$

Exemple 3 — Soit $A = + + - + - - +$ de longueur $n = 7$. En commençant par le plus simple donc par la fin, on trouve :

$c_6(A)$	$c_5(A)$	$c_4(A)$	$c_3(A)$	$c_2(A)$	$c_1(A)$
1	0	−3	2	−1	−2

Définition 4 (Paires de Golay). Une paire de Golay est une paire de suites binaires A, B de même longueur n dont les coefficients de corrélation respectifs satisfont les conditions suivantes :

$$c_k(A) + c_k(B) = 0 \quad \text{pour tout } k = 1, 2, \cdots, n-1$$

Il est remarquable que ces conditions algébriques, une fois implémentées sur des supports physiques avec des fentes verticales percées aux positions des -1 dans les suites binaires considérées, permettent justement de filtrer la lumière entrante en fonction des diverses longueurs d'onde la constituant.

C'est là l'idée géniale de Golay, une parmi bien d'autres. Avant lui, les capteurs infrarouges n'avaient qu'une fente d'entrée et une de sortie pour la lumière à analyser. Le système inventé par Golay est multifentes, avec un placement de fentes subtilement régi par les conditions mathématiques ci-dessus. Avec une paire de Golay (A, B), la suite A code les positions des fentes d'entrée de la lumière, tandis que B code celles des fentes de sortie.

Paires de Golay basiques

Les paires de Golay les plus basiques sont de longueur 2, 10 et 26 et ont toutes été trouvées par Marcel Golay lui-même : en 1949 pour la longueur $n = 2$ (et même pour toute longueur $n = 2^a$, voir ci-dessous), en 1951 pour la longueur $n = 10$ et en 1962 pour la longueur $n = 26$. Les voici :

$n = 2$:

$$\begin{cases} A &=& ++ \\ B &=& +- \end{cases}$$

$n = 10$:

$$\begin{cases} A &=& ++-+-+--++ \\ B &=& ++-++++-- \end{cases}$$

$n = 26$:

$$\begin{cases} A &=& ++++-++--+-+-+--+-++++--+\cdots \\ B &=& ++++-++---+-+++++-+----++-\cdots \end{cases}$$

On laisse aux lectrices et lecteurs courageux le soin de vérifier que les conditions algébriques de Golay $c_k(A) + c_k(B) = 0$ pour tout k entre 1 et $n-1$ sont bien satisfaites. Petit coup de pouce : le plus simple est de commencer à partir de la fin par $k = n-1$ puisque $c_{n-1}(A)$ et $c_{n-1}(B)$ ne contiennent chacun qu'un terme. Poursuivre ensuite en vérifiant $c_{n-2}(A) + c_{n-2}(B) = 0$, avec seulement quatre termes à additionner, etc.

Nombres de Golay

Par commodité, on dira ici que n est un *nombre de Golay* s'il existe une paire de Golay (A, B) avec A et B de longueur n. On vient de voir que 2, 10, 26 sont tous trois des nombres de Golay. La question centrale de cet article peut se reformuler ainsi :

Question. *Quels sont tous les nombres de Golay ?*

Ce genre de question est typique en mathématiques. Dès qu'un objet mathématique est découvert ou inventé, piqués par la curiosité, on cherche à en connaître tous les avatars et toutes les propriétés. C'est l'un des grands moteurs du développement de cette science.

Les connus

Les nombres de Golay qu'on connaît actuellement sont tous de la forme très spéciale décrite par le résultat suivant. On ignore s'il y en a d'autres.

Théorème 5

Tout entier n de la forme $n = 2^a \cdot 10^b \cdot 26^c$ avec a, b, c entiers positifs ou nuls, est un nombre de Golay.

Parmi eux, on retrouve bien nos trois nombres de Golay de base, à savoir 2, 10 et 26. De même, la longueur $n = 80$ utilisée par Golay pour son très innovant spectromètre infrarouge est bien de cette forme : $80 = 2^3 \cdot 10$ avec $a = 3, b = 1, c = 0$. On a aussi le cas évident de longueur $n = 1$ avec $a = b = c = 0$, correspondant à la paire (A, B) avec $A = B = +$. C'est bien une paire de Golay, puisque faute de corrélations dans ce cas, il n'y a aucune condition à vérifier.

Voyons comment ce résultat assez surprenant a été obtenu.

Paires de Golay composées

Une construction astucieuse, par Marcel J. E. Golay en 1951, puis légèrement améliorée par Richard Turyn vers 1970, permet de combiner deux paires de Golay et d'en produire une troisième.

Plus précisément, si (A_1, B_1) est une paire de Golay de longueur n_1 et (A_2, B_2) une paire de Golay de longueur n_2, la construction de Golay-Turyn permet de produire une nouvelle paire de Golay (A_3, B_3) de longueur $n_3 = n_1n_2$. Autrement dit, si n_1 et n_2 sont des nombres de Golay, alors leur produit n_1n_2 en est aussi un.

Ainsi, en partant des paires de Golay de base de longueurs respectives 2, 10 et 26, et en appliquant cette composition autant que nécessaire, on peut construire des paires de Golay de toute longueur $n = 2^a \cdot 10^b \cdot 26^c$, comme annoncé. Cela montre bien que tous les entiers de cette forme sont des nombres de Golay.

Ingrédients

Deux des principaux ingrédients de la construction de Golay-Turyn sont la négation et la concaténation :

— La *négation* d'une suite X, notée $-X$, consiste à changer tous les signes de X. Par exemple, si $X = ++-+$, alors $-X = --+-$.
— La *concaténation* de deux suites finies X et Y s'obtient en enchaînant Y après X. Dénotons-la par XY. Par exemple, si $X = ++-+$ et $Y = ---+$, alors $XY = ++-+---+$.

Sans vouloir donner ici la formule générale de cette construction, contentons-nous de l'illustrer dans le cas le plus simple.

Doublement de longueur

Prenons la paire de Golay basique (A_1, B_1) de longueur $n_1 = 2$:

$$\begin{cases} A_1 &=& ++ \\ B_1 &=& +- \end{cases}$$

Soit maintenant (A_2, B_2) une paire de Golay de longueur n_2. Avec nos ingrédients de négation et de concaténation sur la table, mijotons comme promis, en combinant (A_1, B_1) et (A_2, B_2), une nouvelle paire de Golay (A_3, B_3) de longueur double $n_3 = 2n_2 = n_1n_2$. La recette est on ne peut plus simple : il suffit de poser

$$\begin{cases} A_3 &=& A_2B_2 \\ B_3 &=& A_2(-B_2) \end{cases}$$

Autrement dit, A_3 s'obtient en concaténant A_2 et B_2, tandis que B_3 s'obtient en concaténant A_2 et $-B_2$. À nouveau, on laisse aux lectrices et lecteurs courageux le soin de vérifier que (A_3, B_3) est bel et bien, elle aussi, une paire de Golay.

Illustration

En combinant (A_1, B_1) avec elle-même selon cette recette, on obtient la paire de Golay (A_3, B_3) de longueur $n = 4$ suivante :

$$\begin{cases} A_3 &=& +++- \\ B_3 &=& ++-+ \end{cases}$$

Puis, en combinant (A_1, B_1) avec (A_3, B_3), on obtient la paire de Golay (A_4, B_4) de longueur $n = 8$ suivante :

$$\begin{cases} A_4 &=& +++-++-+ \\ B_4 &=& +++---+- \end{cases}$$

C'est exactement ainsi que Golay a construit, en 1949, des paires de Golay de toute longueur $n = 2^a$.

Conditions nécessaires

On peut démontrer que si n est un nombre de Golay, alors il doit nécessairement satisfaire certaines conditions arithmétiques assez restrictives. Ces conditions ont toutes été découvertes entre 1949 et 1990. Cela fait donc 33 ans maintenant qu'on n'en a pas découvertes de nouvelles. Les voici.

— Pour commencer, Golay lui-même avait déjà observé en 1949 que si $n \geqslant 2$ est un nombre de Golay, alors n est forcément pair et de la forme $n = x^2 + y^2$ avec x, y entiers. Les premiers entiers naturels satisfaisant ces conditions sont 2, 4, 8, 10, 16, tandis que 6, 12, 14 sont exclus car ils ne sont pas somme de deux carrés d'entiers.
— Puis en 1990, Michel Kervaire, Bahman Saffari et votre serviteur ont généralisé la condition $n = x^2 + y^2$ de Golay avec le résultat suivant ([3]), jamais amélioré depuis.

Théorème 6

Si n est un nombre de Golay, alors n n'admet aucun diviseur d de la forme $d = 4k + 3$ avec k entier.

Les premiers entiers pairs satisfaisant cette condition arithmétique sont

2, 4, 8, 10, 16, 20, 26, 32, 34, 40, etc.

Tous les nombres de cette petite liste sont de la forme connue $2^a \cdot 10^b \cdot 26^c$ sauf $n = 34$. On revient sur ce cas ci-dessous. Par contraste, les premiers entiers pairs exclus comme nombres de Golay par ce théorème sont

6, 12, 14, 18, 22, 24, 28, 30, 36, 38, etc.

Exclusion par ordinateur

Le cas $n = 34$ est particulier : il n'est pas d'emblée exclu comme possible nombre de Golay par le théorème ci-dessus. Pourtant, une exploration exhaustive par ordinateur révèle qu'*il n'existe aucune paire de Golay (A, B) de longueur $n = 34$*. C'est très embarrassant. On ne connaît à ce jour aucune preuve théorique permettant de comprendre pourquoi $n = 34$ n'est pas un nombre de Golay. Quelques autres nombres entiers sont dans la même situation. Les voici tous :

Théorème 7 (Par ordinateur, aucune preuve théorique connue)

Aucun des entiers suivants n'est un nombre de Golay :

34, 50, 58, 68, 74, 82.

Les cas $n = 74$ et 82 ont été exclus en 2003 par Peter B. Borwein et Ron Ferguson ([1]). L'approche utilisée est une recherche exhaustive par ordinateur, avec de subtiles idées de réduction de l'énorme espace de recherche, à la limite du possible dans ces longueurs. Après $n = 82$, le plus petit cas en doute est $n = 106$. Or à ce jour, la technologie et les méthodes disponibles ne permettent pas encore d'explorer tout l'espace de recherche des paires de Golay de cette longueur.

The conjecture

Outre $n = 2^a \cdot 10^b \cdot 26^c$, on n'a trouvé aucun nouveau nombre de Golay depuis 1962. Et les résultats ci-dessus semblent pointer dans la même direction. D'où la conjecture suivante.

Conjecture 8. Il n'existe aucun nombre de Golay n qui ne soit de la forme $n = 2^a \cdot 10^b \cdot 26^c$.

Cette conjecture est actuellement vérifiée jusqu'à $n = 105$, grâce aux résultats théoriques et par ordinateur exposés ci-dessus. Jusqu'à 150, les seuls cas ouverts de cette conjecture sont

$$n = 106, 116, 122, 130, 136, 148.$$

Ils ne sont pas de la forme connue $n = 2^a \cdot 10^b \cdot 26^c$, ne sont pas couverts par les théorèmes ci-dessus et restent inaccessibles par ordinateur. On conjecture qu'aucun d'eux n'est un nombre de Golay. Mais seul l'avenir (un an ? dix ans ? un siècle ? plus encore ?) nous dira ce qu'il en est.

Il ne reste plus qu'à espérer de nouvelles idées, en particulier de jeunes chercheuses et chercheurs interpellés par ce mystère et bien décidés à s'y confronter, et accessoirement des ordinateurs plus puissants, pour en savoir davantage sur ces nombres de Golay nés il y a plus de 70 ans.

Références

[1] Peter B. Borwein et Ron Ferguson. « A complete description of Golay pairs for lengths up to 100 ». *Math. Comput.* 73 (2003), p. 967-985. URL : https://api.semanticscholar.org/CorpusID:12769948.

[2] Shalom Eliahou. « Connaît-on toutes les suites de Barker ? » *Images des mathématiques* (21 mars 2022). URL : https://images.math.cnrs.fr/connait-on-toutes-les-suites-de-barker.

[3] Shalom Eliahou, Michel Kervaire et Bahman Saffari. « A new restriction on the lengths of golay complementary sequences ». *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 55.1 (1990), p. 49-59. ISSN : 0097-3165. DOI : https://doi.org/10.1016/0097-3165(90)90046-Y. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/009731659090046Y.

[4] Marcel J. E. Golay. « Multi-Slit Spectrometry* ». *J. Opt. Soc. Am.* 39.6 (1949), p. 437-444. DOI : 10.1364/JOSA.39.000437. URL : https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=josa-39-6-437.

[5] Marcel J. E. Golay. « Static Multislit Spectrometry and Its Application to the Panoramic Display of Infrared Spectra* ». *J. Opt. Soc. Am.* 41.7 (1951), p. 468-472. DOI : 10.1364/JOSA.41.000468. URL : https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=josa-41-7-468.

Remerciements

L'auteur et la rédaction d'Images des maths remercient Bruno Martin et le relecteur de pseudonyme LALANNE pour leur relecture attentive et leurs commentaires.

Article édité par Bruno Martin.

Shalom Eliahou
Professeur – Université du Littoral Côte d'Opale, Calais
http://www.lmpa.univ-littoral.fr/~eliahou/

Crédits

Frontispice : NASA (National Aeronautics and Space Administration).

1. Voir par exemple cette interview en juillet 2022 d'Olivier Berné, astrophysicien au CNRS.
2. Ou plus précisément, coefficients de corrélation *apériodiques*.