Retour sur la conjecture de Syracuse

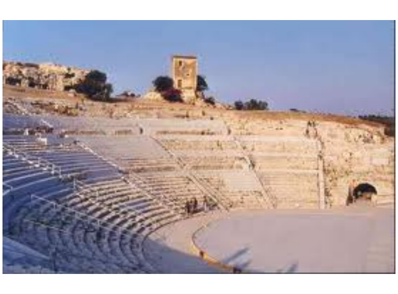
Écrit par **Shalom Eliahou**

Publié le 3 janvier 2024

DOI : 10.60868/w3e8-fj21 — CC BY-NC-ND 4.0

— 15 min ⩽ ⩽ 30 min

ARITHMÉTIQUE



En cheminant plus vite dans les trajectoires du problème $3n+1$, un phénomène inattendu émerge.

Plan de l'article

La conjecture de Syracuse

On revient ici sur la conjecture de Syracuse, aussi appelée conjecture de Collatz, de Hasse, de Kakutani, problème $3n+1$, etc. C'est la conjecture la plus élémentaire des mathématiques, compréhensible dès l'âge de 8 ans mais à ce jour non résolue depuis plus de 90 ans. Son objet central est une fonction toute simple opérant sur les nombres entiers naturels : appliquée à l'entier n, elle produit $n/2$ si n est pair, $(3n+1)/2$ si n est impair.

Une fonction toute simple et ses trajectoires

Appelons T cette fonction. On note $T(n)$ le résultat produit en appliquant T à n. Par exemple, appliquée à $n=6$, elle produit $T(6)=3$; et appliquée à $n=3$, elle produit $T(3)=5$. Écrivons simplement $n \to T(n)$ pour dénoter cette transformation. Par exemple, on a $1 \to 2$, $2 \to 1$, $4 \to 2$, $5 \to 8$, $8 \to 4$, etc. Sans oublier $6 \to 3$ et $3 \to 5$ vus ci-dessus. On peut aussi rassembler ces deux derniers cas en écrivant $6 \to 3 \to 5$. Dès lors, pourquoi s'arrêter en si bon chemin ? En poursuivant l'application répétée de T à partir de 6, voici la suite obtenue :

$$6 \to 3 \to 5 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1 \to 2 \to 1 \to \cdots$$

On atteint 1 à la 6e étape. À ce stade la trajectoire devient cyclique, alternant simplement entre 1 et 2. La suite obtenue à partir de n en appliquant T de façon répétée s'appelle la *trajectoire de n*, ou *trajectoire de n sous T* pour plus de précisions si nécessaire. Prenons une autre trajectoire, par exemple celle de $n=9$. On obtient la suite

$$9 \to 14 \to 7 \to 11 \to 17 \to 26 \to 13 \to 20 \to 10 \to 5 \to 8 \to 4 \to 2$$

Là encore, la trajectoire finit par atteindre 1, en l'occurrence au bout de 13 étapes. Amusez-vous à calculer d'autres trajectoires. Pas d'échappatoire, vous verrez, on finit toujours par tomber tôt ou tard sur 1. Tel est le contenu de la conjecture de Syracuse.

Conjecture 1 (de Syracuse). La trajectoire sous T de tout entier naturel n atteint 1.

Une conjecture plus forte que celle de Syracuse

L'objet de cet article est d'exposer une nouvelle conjecture, datant de 2022, intimement liée à celle de Syracuse mais encore plus forte, dans le sens que toute solution de la nouvelle conjecture fournira automatiquement une solution de celle de Syracuse. Les auteurs de cette conjecture renforcée sont Jean Fromentin, Rénald Simonetto et votre serviteur [4]. Commençons par quelques préliminaires pour situer le contexte.

Itération

Appliquer de façon répétée une fonction — autrement dit l'*itérer* — est fréquent en mathématiques. Le mystère, c'est que même pour une fonction très simple, le fait de l'itérer peut conduire à des comportements complexes, difficiles à prédire, voire chaotiques. Outre le cas de la fonction T, objet de cet article, voici pour mettre en appétit un tout autre exemple de ce phénomène.

Considérons la fonction $f(x)=(x+2)/(x+1)$ définie sur les nombres rationnels $x=a/b$ positifs. La trajectoire de $x=1$ sous f commence ainsi :

$$1 \to 3/2 \to 7/5 \to 17/12 \to 41/29 \to 99/70 \to \cdots$$

En écriture arrondie à 4 décimales, cela s'écrit

$$1 \to 1{,}5 \to 1{,}4 \to 1{,}4167 \to 1{,}4138 \to 1{,}4143 \to \cdots$$

Il s'avère que les décimales successives se stabilisent peu à peu et que cette trajectoire tend vers

$$\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562\,373\,095\,048\,801\,688\,724\,21 \cdots$$

un nombre dont la découverte de l'irrationalité a causé beaucoup d'émoi chez les Grecs Anciens. En poussant le calcul de cette trajectoire aussi loin que possible, on constate que chacun des chiffres de 0 à 9 semble apparaître avec la même fréquence — soit environ 10% — dans la suite des décimales obtenues. Mais voilà, personne à ce jour ne sait comment le démontrer.

Retour à la fonction T

La fonction T donne un bel exemple d'émergence de comportements complexes par itération d'une fonction vraiment très simple en l'occurrence. Observons par exemple la trajectoire de $n=27$ sous T :

$$27 \to 41 \to 62 \to 31 \to 47 \to 71 \to 107 \to 161 \to 242 \to 121 \to 182 \to 91 \to 137 \to 206 \to 103 \to 155 \to 233 \to 350 \to 175 \to 263 \to 395 \to 593 \to 890 \to 445 \to 668 \to 334 \to 167 \to 251 \to 377 \to 566 \to 283 \to 425 \to 638 \to 319 \to 479 \to 719 \to 1079 \to 1619 \to 2429 \to 3644 \to 1822 \to 911 \to 1367 \to 2051 \to 3077 \to 4616 \to 2308 \to 1154 \to 577 \to 866 \to 433 \to 650 \to 325 \to 488 \to 244 \to 122 \to 61 \to 92 \to 46 \to 23 \to 35 \to 53 \to 80 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1 \to \cdots$$

Conformément à la conjecture de Syracuse, on finit bien par atteindre 1, mais ici à la 70e étape, après avoir grimpé jusqu'à 4616. Voilà une trajectoire déjà bien corsée.

Temps de vol et de survol

Partons d'un entier $n \geqslant 2$.

Définition 2 (Temps de vol). Le *temps de vol de n* est le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre 1 dans sa trajectoire sous T.

Par exemple, le temps de vol de $n=9$ est 13. En effet, on l'a vu, il faut 13 étapes à partir de 9 pour atteindre 1. Et le temps de vol de $n=27$ est 70. Mais avant d'atteindre 1 en partant de n, il faut déjà atteindre un entier m inférieur à n. D'où la définition suivante.

Définition 3 (Temps de survol). Le *temps de survol de n* est le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre un entier m strictement inférieur à n dans sa trajectoire sous T.

Par exemple, le temps de survol de $n=9$ est... 2. En effet, la trajectoire de 9 commence par $9 \to 14 \to 7 \to \cdots$. Donc, au bout de 2 itérations à peine, on atteint 7 qui est inférieur à 9. Notons que pour tout entier de départ $n \geqslant 2$, son temps de survol est inférieur à son temps de vol — à condition que la conjecture de Syracuse soit vraie, bien sûr.

Ces concepts de temps de vol et de survol mènent tout naturellement à deux formulations équivalentes de la conjecture de Syracuse.

Conjecture 4. Soit $n \geqslant 2$ un nombre entier quelconque. Alors le temps de vol de n est fini.

Conjecture 5. Soit $n \geqslant 2$ un nombre entier quelconque. Alors le temps de survol de n est fini.

Démonstration (*conjecture 5* $\implies$ *conjecture 1*). Partons de $n \geqslant 2$. D'après la conjecture 5, la trajectoire de n atteint un entier $n_1 < n$. Si $n_1 = 1$ on a fini. Si $n_1 \geqslant 2$, on applique le même raisonnement à n_1. On trouvera donc $n_2 < n_1$ dans la trajectoire de n_1 et donc de n. Une application répétée de cet argument prouve que la trajectoire de n finit par atteindre 1. □

Longues trajectoires

Comme le montre le cas de $n=27$, certains entiers n peuvent avoir des temps de survol et de vol très longs, en fait *arbitrairement longs*. Typiquement, pour $n=2^k-1$, son temps de survol vaut au moins k. En effet, il est facile de vérifier que les k premières étapes de la trajectoire de 2^k-1 sous T sont les suivantes :

$$(2^k-1) \to (3\cdot 2^{k-1}-1) \to (3^2\cdot 2^{k-2}-1) \to (3^3\cdot 2^{k-3}-1) \to \cdots \to (3^k-1)$$

Or ces k premiers termes sont tous supérieurs à 2^k-1, vu que 3 est supérieur à 2. D'où la conclusion annoncée. Par exemple, pour $k=5$, voici les 5 premiers termes de la trajectoire de $n=2^5-1=31$:

$$31 \to 47 \to 71 \to 107 \to 161 \to 242$$

Ça ne fait que monter. Mais ça redescend juste après, l'étape suivante étant $242 \to 121$. De même, pour $k=1000$, le temps de survol de $n=2^{1000}-1$ vaut au moins 1000. En fait, en poussant le calcul plus loin, on trouve que son temps de survol vaut précisément 3567. Quant à $n=2^{10000}-1$, son temps de survol vaut précisément 37 677.

Du déterministe à l'aléatoire

En appliquant T une seule fois sur n, le résultat est parfaitement déterminé : c'est $n/2$ ou $(3n+1)/2$ suivant la parité de n. *A fortiori*, en itérant T un petit nombre de fois, le comportement reste complètement déterministe. Mais en pratique, on observe qu'en itérant T un grand nombre de fois, une sorte de comportement aléatoire émerge : la parité de chaque nouveau terme semble être régie par une sorte de pile ou face, tombant sur pair ou impair avec probabilité tendant vers 1/2 sur le long terme.

C'est le cœur du problème. Si on pouvait le démontrer, ça résoudrait la conjecture de Syracuse. Car alors, ça impliquerait que loin dans la trajectoire de n, en appliquant deux fois de suite T au nombre m, on tomberait en moyenne sur un nombre proche de $3m/4$, donc plus petit que m. Bref, cela impliquerait que T serait une application à tendance finalement contractante. Et donc, qu'en partant d'entiers $n \geqslant 3$, elle conduirait forcément vers 1 au bout d'un nombre suffisant d'étapes.

Accélération

Tenant compte de ce phénomène d'émergence de comportement pseudo-aléatoire à long terme, il nous est venu l'idée suivante [4] : à partir d'un entier n donné, appliquer T non pas une seule fois, mais plusieurs fois de suite d'un coup, où « plusieurs » dépend de la taille de n. Par exemple, si n s'écrit avec 5 chiffres, on applique d'un coup T cinq fois de suite à partir de n, ce qu'on notera par $T^{(5)}(n)$. Appelons A cette version accélérée de T, définie ainsi : si l'entier n s'écrit avec k chiffres, on pose

$$A(n) = T^{(k)}(n),$$

c'est-à-dire T itéré k fois à partir de n. Dénotons $n \dashrightarrow A(n)$ cette transformation, pour bien la distinguer de $n \to T(n)$. Par exemple, sous T on a $104 \to 52 \to 26 \to 13$, ce qui sous A donne $104 \dashrightarrow 13$. En effet, appliquer A à 104, qui a trois chiffres, revient à appliquer trois fois de suite T à partir de 104.

Exemple 6 ($n=27$) — En regardant la trajectoire sous T de 27 donnée plus haut, on obtient sans peine sa trajectoire sous A :

$$27 \dashrightarrow 62 \dashrightarrow 47 \dashrightarrow 107 \dashrightarrow 121 \dashrightarrow 137 \dashrightarrow 155 \dashrightarrow 175 \dashrightarrow 593 \dashrightarrow 668 \dashrightarrow 251 \dashrightarrow 283 \dashrightarrow 319 \dashrightarrow 1079 \dashrightarrow 1822 \dashrightarrow 3077 \dashrightarrow 577 \dashrightarrow 650 \dashrightarrow 244 \dashrightarrow 92 \dashrightarrow 23 \dashrightarrow 53 \dashrightarrow 40 \dashrightarrow 10 \dashrightarrow 8 \dashrightarrow 4 \dashrightarrow 2 \dashrightarrow 1$$

On l'a vu, la trajectoire sous T de 27 atteint 1 en 70 étapes. Avec la fonction accélérée A, on atteint 1 en 27 étapes.

Temps de vol et de survol pour A

Tout naturellement, comme pour T, on peut définir des temps de vol et de survol pour A. Soit $n \geqslant 2$ un entier.

- Le *temps de vol de n pour A* est le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre 1 dans sa trajectoire sous A.
- Le *temps de survol de n pour A* est le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre un entier m inférieur à n dans sa trajectoire sous A.

Pour faciliter la discussion, introduisons une notation spécifique pour les temps de vol et de survol respectifs de T et A :

- $v_T(n)$ et $sv_T(n)$: temps de vol et de survol de n pour T ;
- $v_A(n)$ et $sv_A(n)$: temps de vol et de survol de n pour A.

Par exemple pour $n=27$, on trouve

$v_T(27)=70$	$sv_T(27)=59$
$v_A(27)=27$	$sv_A(27)=20$

Comme A est une version accélérée de T, pour les temps de vol on a toujours $v_A(n) \leqslant v_T(n)$ si $n \geqslant 2$. Mais ce n'est pas toujours vrai pour les temps de survol. Un contre-exemple est donné par $n=9$. Sa trajectoire sous T est

$$9 \to 14 \to 7 \to 11 \to 17 \to 26 \to 13 \to 20 \to 10 \to 5 \to \cdots$$

Donc sa trajectoire accélérée sous A est

$$9 \dashrightarrow 14 \dashrightarrow 11 \dashrightarrow 26 \dashrightarrow 20 \dashrightarrow 5 \dashrightarrow \cdots$$

Ainsi $sv_T(9) = 2$ comme déjà observé, tandis que $sv_A(9)=5$: il faut 5 étapes dans la trajectoire sous A pour tomber sur un nombre inférieur à 9.

Voici deux autres formulations équivalentes de la conjecture de Syracuse, cette fois-ci en termes de la fonction accélérée A.

Conjecture 7. Soit $n \geqslant 2$ un entier quelconque. Alors $v_A(n)$ est fini.

Conjecture 8. Soit $n \geqslant 2$ un entier quelconque. Alors $sv_A(n)$ est fini.

Une grosse surprise

En calculant le temps de survol pour A de très grands nombres entiers, notamment des $n=2^k-1$ avec k lui-même grand, on tombe sur un résultat complètement inattendu. Pour T, les $sv_T(2^k-1)$ sont finis selon la conjecture de Syracuse, mais arbitrairement grands lorsque k augmente puisque $sv_T(2^k-1) \geqslant k$. Et pour A ? La finitude des $sv_A(2^k-1)$ découle de la finitude conjecturée des temps de vol pour T, puisque $sv_A(n) \leqslant v_A(n) \leq v_T(n)$ pour tout $n \geqslant 2$.

La grosse surprise, c'est que les $sv_A(2^k-1)$, non contents d'être finis, semblent en plus *plafonnés* ou *bornés* contrairement aux $sv_T(2^k-1)$. En effet, aussi loin que l'on pousse les calculs, il semble que les $sv_A(2^k-1)$ n'excèdent jamais la valeur maximale de 19, et même de 11 à partir de $k=4402$. D'où la conjecture suivante, inspirée par ces résultats expérimentaux.

Conjecture 9. On a $sv_A(2^k-1) \leq 19$ pour tout $k \geq 2$ et $sv_A(2^k-1) \leq 11$ pour tout $k \geq 4402$.

Résultats numériques

Voici trois tableaux en appui de ces surprenantes observations.

— D'abord pour $2 \leqslant k \leqslant 21$:

k	$n=2^k-1$	$sv_T(n)$	$sv_A(n)$
2	3	4	4
3	7	7	4
4	15	7	4
5	31	56	19
6	63	54	19
7	127	15	5
8	255	13	5
9	511	18	5
10	1023	18	5
11	2047	58	12
12	4095	51	11
13	8191	43	8
14	16383	43	7
15	32767	51	9
16	65535	48	9
17	131071	100	14
18	262143	89	14
19	524287	56	8
20	1048575	54	7
21	2097151	64	9

— Puis pour $4400 \leqslant k \leqslant 4410$:

k	$sv_T(2^k-1)$	$sv_A(2^k-1)$
4400	16982	11
4401	18559	12
4402	18559	11
4403	18559	11
4404	18556	11
4405	16953	11
4406	16947	11
4407	18556	11
4408	18556	11
4409	16942	11
4410	16934	11

— Et pour $20385 \leqslant k \leqslant 20395$:

k	$sv_T(2^k-1)$	$sv_A(2^k-1)$
20385	75709	10
20386	75706	10
20387	75706	10
20388	75706	10
20389	79014	11
20390	79011	11
20391	79009	11
20392	79009	11
20393	79009	11
20394	78998	11
20395	78995	11

Il faut bien sûr s'intéresser à tous les entiers positifs n, pas seulement à ceux de la forme $n=2^k-1$. On trouve alors des n tels que $sv_A(n)$ dépasse le maximum observé de 19 atteint par les $sv_A(2^k-1)$, mais pas au delà de 50. En fait, la valeur maximale de $sv_A(n)$ trouvée à ce stade est 47 et divers indices laissent penser que c'est le maximum absolu ou presque.

Voici donc, sur ces bases expérimentales, la conjecture annoncée en début d'article. Elle est strictement plus forte que la conjecture de Syracuse car elle l'implique mais pas réciproquement.

Conjecture 10 (Version forte de la conjecture de Syracuse). Le temps de survol pour A de tout entier $n \geqslant 2$ est *borné*. Plus précisément, pour tout $n \geqslant 2$, $sv_A(n) \leqslant 50$.

Ce plafonnement inattendu pour A, en contraste marquant avec le comportement de T, donne un éclairage nouveau sur la conjecture de Syracuse.

Remarque 11 — Les conjectures 9 et 10 présentées ici sont légèrement adaptées, pour les besoins de Images des Maths, de celles tout récemment formulées dans [4][1]. La différence est dans la définition de la fonction accélérée A, qui dépend du choix de l'écriture des nombres : décimale ici, binaire dans [4]. Cela dit, changer de base de numération ne change pas l'essence de ces nouvelles conjectures, à savoir la nature *bornée* des temps de survol pour A.

Pour d'autres articles sur la conjecture de Syracuse paru dans Images des maths, voir [1-3].

1. Disponible en libre accès sur le portail scientifique HAL à l'adresse https://hal.science/hal-03294829v4.

Références

[1] Shalom Eliahou. « Le problème $3n+1$: cycles de longueur 5 (II) ». *Images des mathématiques* (16 nov. 2011). URL : https://images.math.cnrs.fr/Le-probleme-3n-1-cycles-de-longueur-5-II.html.

[2] Shalom Eliahou. « Le problème $3n+1$: élémentaire mais redoutable (I) ». *Images des mathématiques* (13 nov. 2011). URL : https://images.math.cnrs.fr/Le-probleme-3n-1-elementaire-mais-redoutable-I.

[3] Shalom Eliahou. « Le problème $3n+1$: y a-t-il des cycles non triviaux ? (III) ». *Images des mathématiques* (20 déc. 2011). URL : https://images.math.cnrs.fr/Le-probleme-3n-1-y-a-t-il-des-cycles-non-triviaux-III.html.

[4] Shalom Eliahou, Jean Fromentin et Rénald Simonetto. *Is the Syracuse Falling Time Bounded by 12 ?* Sous la dir. de Melvyn B. Nathanson. Springer International Publishing, 2022, p. 139-152. ISBN : 9783031107962. DOI : 10.1007/978-3-031-10796-2_7.

Remerciements

L'auteur et la rédaction d'Images des maths remercient vivement Laurent Bartholdi, Denis Bitouzé, Jean Fromentin, Bruno Martin, Rénald Simonetto, et le relecteur de pseudonyme Mesmaker, pour leur relecture attentive et leurs précieux commentaires sur des versions préliminaires de cet article.

Article édité par Clément Caubel.

Shalom Eliahou
Professeur – Université du Littoral Côte d'Opale
http://www.lmpa.univ-littoral.fr/~eliahou/

Crédits

Frontispice : Théatre grec de Syracuse. Fotovideomike from Italia (Michele Ponzio).