DEMONSTRATION
SUR LE NOMBRE DES POINTS, OU DEUX LIGNES DES ORDRES QUELCONQUES PEUVENT SE COUPER.

PAR M. EULER.

I.

Dans la Piece prècedente j'ai rapporté ſans démonſtration cette propoſition, *que deux lignes courbes algebriques, dont l'une eſt de l'ordre* m *& l'autre de l'ordre* n *ſe peuvent couper en* m n *points.* La verité de cette propoſition eſt reconnuë de tous les Geometres, quoiqu'on doive avouër, qu'on n'en trouve nulle part une démonſtration aſſés rigoureuſe. Il y a des verites générales, que notre esprit eſt prêt d'embraſſer auſſitot qu'il en reconnoit la juſteſſe dans quelques cas particuliers: & c'eſt parmi cette eſpece de verités, qu'on peut ranger à bon droit la propoſition, dont je viens de faire mention, puisqu'on la trouve vraie non seulement dans quelques, ou pluſieurs cas, mais auſſi dans une infinité de cas differens. Cependant on conviendra aiſément, que toutes ces preuves infinies ne ſont pas capables de mettre cette propoſition à l'abri de toutes les objections, qu'un adverſaire peut former, & qu'il faut abſolument une démonſtration rigoureuſe, pour le réduire au ſilence.

II. Avant

II. Avant que d'entreprendre la démonstration de cette proposition, il en faut bien fixer le sens, Premierement il est à remarquer, que le nombre des intersections de deux lignes, dont l'une est de l'ordre m, l'autre de l'ordre n, n'est pas nécessairement $= m\,n$, mais qu'il peut fort souvent être plus petit. Ainsi il peut arriver, que deux lignes droites ne se coupent point du tout, lorsqu'elles sont paralleles : & qu'une ligne droite ne coupe une parabole que dans un point : & que deux sections coniques ne se coupent l'une l'autre qu'en deux points, ou point du tout. Ainsi le sens de notre proposition est, que le nombre des intersections ne peut jamais être plus grand que $m\,n$, quoiqu'il soit souvent plus petit; & alors on juge, ou que quelques intersections s'éloignent à l'infini, ou qu'elles deviennent imaginaires. De sorte qu'en contant les intersections à l'infini, & les imaginaires aussi bien que les réelles, on puisse dire, que le nombre des intersections est toujours $= m\,n$.

III. Il peut y avoir pourtant des cas, où le nombre des intersections est infini, si l'on veut regarder la coïncidence de deux lignes égales & semblables pour une infinité d'intersections. Ce cas arrivera donc, si les deux équations, qui expriment les deux lignes, sont les mêmes, ou si elles ont des facteurs égaux. Mais comme la coïncidence parfaite ne peut pas proprement être regardée comme une infinité d'intersections, puisque c'est plutot un attouchement continuel, le contenu de la proposition ne souffre aucune exception réelle de ce coté là ; & si la question roule sur le nombre d'intersections de deux lignes courbes, on suppose toujours qu'elles ne sont ni coïncidentes, ni qu'élles ont des parties, dont l'une tombe parfaitement sur l'autre. Ainsi on pourra énoncer la proposition en question de cette maniere : que deux lignes courbes, l'une de l'ordre m, & l'autre de l'ordre n, dont les équations ne sont, ni les mêmes, ni qu'elles ont aucun commun diviseur, ne se peuvent jamais couper en plus que $m\,n$ points, bien que le nombre des intersections puisse fort souvent être plus petit.

IV. On reconnoitra aisément la verité de cette proposition générale dans une infinité de cas differens, & qui pourroient même tenir lieu d'une démonſtration, ſi l'on ne ſe piquoit pas de n'avancer rien dans la Geometrie, qui ne ſoit muni d'une démonſtration rigoureuſe. Cependant comme ces preuves particulieres ne contribuënt pas peu à connoitre mieux la propoſition même, & à en faire ſentir l'importance, je commencerai par l'explication de ces preuves, avant que d'entreprendre la démonſtration générale. Et d'abord la verité de cette propoſition eſt reconnuë dans le cas, où l'une des deux lignes, qui ſe coupent, eſt droite, ou du premier ordre, c. à. d. ſi $m = 1$, car alors il eſt aiſé de démontrer que le nombre des interſections d'une ligne de l'ordre n par une ligne droite eſt égal à n, ou plus petit. Car l'équation générale des lignes de l'ordre n étant :

$$\alpha y^{n} + (\beta + \gamma x) y^{n-1} + (\delta + \varepsilon x + \zeta x^{2}) y^{n-2} + \&c. = 0$$

ſi de l'équation pour une ligne droite quelconque

$$a y + b x + c = o$$

on ſubſtituë la valeur de $y = - \frac{b\ x - c}{a}$, on parviendra à une équation, où l'inconnuë x ne monte, qu'à n dimenſions. Donc puisque chaque interſection eſt marquée par une racine de x de cette équation, il eſt clair que le nombre des interſections eſt égal au nombre des racines de cette équation, & qu'il ne peut pas par conſéquent être plus grand que n. De plus on verra que le nombre des interſections eſt $= n$, ſi toutes les racines ſont réelles, & qu'il ſera plus petit, ſi quelques unes de ces racines ſont imaginaires. Or ſi les plus hautes dimenſions de x ſe détruiſent mutuellement, & que l'équation apres l'elimination de y ſe réduiſe à un degré inferieur, c'eſt une marque, que quelques points d'interſections s'eloignent à l'infini.

V. Soit $m = 2$, & que la ligne du ſecond ordre ſoit compoſée de deux lignes droites, ce qui arrive, lorsque l'équation eſt réſoluble en deux facteurs, comme

$$(a y + b x + c) (d y + e x + f) = o$$

Or

Or l'autre ligne soit une courbe quelconque de l'ordre n, dont la nature soit exprimée par cette équation

$$\alpha y^{n} + (\beta + \gamma x) y^{n-1} + (\delta + \epsilon x + \zeta x^{2}) y^{n-2} + \&c. = o$$

Dans ce cas il est clair, puisque cette ligne de l'ordre n ne peut être coupée par une ligne droite qu' en n points; que deux lignes droites qui sont regardées comme une seule ligne du second ordre, la pourront couper en $2n$ points, lorsque chacune la coupe en n points: ce qui est conforme à l'enoncé de la proposition, puisque mn dans ce cas devient $= 2n$.

VI. Si l'une des deux lignes proposées est du troisieme ordre, mais qu'elle soit composée de trois lignes droites, l'autre demeurant une courbe quelconque de l'ordre n, il est clair que le nombre d'intersections sera $= 3n$, ou moindre, comme la proposition exige. Et il en sera de même d'une ligne de l'ordre quelconque m, si elle consiste de m lignes droites, ou si son équation est résoluble en autant d'équations simples de cette forme $ay + bx + c = o$; car puisque chacune de ces lignes droites peut couper l'autre ligne proposée de l'ordre n en n points, le nombre de toutes les intersections pourra monter à mn, selon l'enoncé de la proposition. Et partant nous avons déjà une *infinité* de cas, où la verité de cette proposition se trouve solidement établie. Mais dans tous ces cas l'une des deux lignes proposées, n'est pas veritablement une ligne courbe, mais plutot un amas de plusieurs lignes droites, selon l'ordre auquel elle appartient.

VII. Mais il y a aussi une infinité de lignes courbes où la verité éclate avec autant de clarté. Car soit l'une des deux lignes une parabole exprimée par l'équation: $y = axx + bx + c$, & partant $m = 2$: l'autre courbe soit exprimée par l'équation générale de l'ordre n:

$$\alpha y^{n} + (\beta + \gamma x) y^{n-1} + (\delta + \epsilon x + \zeta xx) y^{n-2} + \&c. = a.$$

& il est evident que si l'on met ici par tout pour y sa valeur $axx + bx + c$, cette équation montera au degré $2n$, & la racine x pourra avoir autant de racines, dont toutes les intersections seront indiquées:

 donc

donc il ſera poſſible que la ligne de l'ordre n ſoit coupée par la parabole en $2n$ points : & quoique le nombre des interſections puiſſe ſouvent être plus petit, on voit pourtant, qu'il ne peut jamais être plus grand que $2n$.

VIII. La même choſe paroit auſſi, ſi l'une des deux lignes eſt une courbe parabolique d'une ordre queltonque :

$$y = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \&c.$$

Car ſi l'on met cette valeur pour y dans l'équation pour l'autre courbe de l'ordre n, on verra ſans difficulté, que la lettre x obtiendra dans l'équation reſultante mn dimenſions, qui marquent autant de racines & partant autant d'interſections, tout comme la propoſition prononce. De là on conclura auſſi, comme l'axe des deux courbes eſt arbitraire, quand même l'une des deux courbes ne ſeroit pas exprimée par une telle équation :

$$y = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \&c.$$

pourvu qu'en changeant d'axe, & même d'inclinaiſon entre les coordonnées, l'equation puiſſe être réduite à cette forme, le nombre des interſections ſera également $= mn$, l'équation qui deſigne les interſections montant toujours à ce degré, ou un inferieur, & jamais à un plus haut,

IX. Ces cas particuliers joints enſemble nous conduiſent à un cas beaucoup plus général, où la verité de la propoſition ſe trouve confirmée. Car toutes les fois que l'équation de la premiere ligne, que je ſupoſe de l'ordre m ſe peut réſoudre en des facteurs, qui expriment, ou lignes droites, ou courbes paraboliques, cette équation étant :

$$(y - P)\ (y - Q)\ (y - R)\ (y - S)\ \&c. = o$$

où P, Q, R, S, &c. ſoient des fonctions rationelles de x, & le premier facteur $y - P = o$ marque une ligne de l'ordre p, le ſecond $y - Q = o$ une de l'ordre q, le troiſieme une de l'ordre r, &c. de ſorte que $p + q + r + s +$ &c. $= m$, cette ligne ſera compoſée de toutes ces lignes droites ou courbes enſemble : & l'autre courbe, que je ſuppoſe

être

être de l'ordre n, pourra être coupée de la partie de la premiere, qui est exprimée par le facteur $y - P = o$, en $p\,n$ points, de la partie comprise en $y - Q = o$ en $q\,n$ points, de la partie comprise en $y - R = o$ en $r\,n$ points. &c. Et partant la ligne de l'ordre n pourra être coupée par toutes les parties de la ligne premiere de l'ordre m en $pn + qn + rn + sn +$ &c. points, c'est à dire en $m\,n$ points, à cause de $p + q + r + s +$ &c. $= m$.

X. Quoique ces cas aillent à l'infini, on conviendra neanmoins, qu'il s'en faut encore beaucoup, que la verité de la proposition soit démontrée dans toute son étenduë. Et pour parvenir à une telle démonstration il faut prouver, que deux équations d'ordres quelconques étant proposées, comme:

$$ay^{m} + (b + cx)y^{m-1} + (d + ex + fxx)y^{m-2} + \&c. = o$$
$$\alpha y^{n} + (\beta + \gamma x)y^{n-1} + (\delta + \epsilon x + \zeta xx)y^{n-2} + \&c. = o$$

si l'on elimine l'une ou l'autre des deux variables x & y, l'autre ne monte aprés l'elimination qu'à mn dimensions. Il est bien vrai qu'il seroit imposible d'achever en général cette élimination, pour faire voir actuellement, à combien de dimensions l'autre variable pourroit monter: & même dans la plupart des cas si l'on se sert des methodes ordinaires d'eliminer, on parviendra à une équation de plus de dimensions, que mn; de sorte qu'emploiant cette maniere, on devroit plutot croire que la proposition fut fausse. Car quoique l'équation, à laquelle on arrive par ce chemin, ait des diviseurs, on a lieu de douter, si l'on peut negliger ces diviseurs, & s'ils ne renferment des racines, qui marquent des intersections.

XI. Pour faire sentir plus évidemment cette difficulté, je m'en vai éliminer suivant la maniere ordinaire la quantité y de ces deux équations:

I. $Py^3 + Qy^2 + Ry + S = o.$

II. $py^3 + qy^2 + ry + s = o.$

Où P, Q, R, S, p, q, r, s soient des fonctions quelconques de l'autre

tre quantité variable x. Multiplions la premiere par s, & la ſeconde par S, & la difference étant diviſée par y donnera :

$$\text{III. } (Ps - pS)\,y^2 + (Qs - qS)\,y + Rs - rS = o.$$

Enſuite multiplions la premiere par p, & la ſeconde par P, & la difference donnera :

$$\text{IV. } (Qp - qP)\,y^2 + (Rp - rP)\,y + Sp - sP = o.$$

De la même maniere de ces deux équations du ſecond degré nous tirerons deux du premier degré de y :

$$\text{V. } ((Ps-pS)(Sp-sP) - (Qp-qP)(Rs-rS))\,y + (Qs-qS)(Sp-sP) - (Rp-rP)(Rs-rS) = o.$$

$$\text{VI. } ((Qs-qS)(Qp-qP) - (Rp-rP)(Ps-pS))\,y + (Rs-rS)(Qp-qP) - (Sp-sP)(Ps-pS) = o.$$

Et de là on tirera cette équation, ou la quantité y ne ſe trouve plus :

$$\begin{aligned}\text{VII. } &(Ps-pS)(Sp-sP)(Rs-rS)(Qp-qP) - (Ps-pS)^2(Sp-sP)^2\\ &-(Qp-qP)^2(Rs-rS)^2 + (Qp-qP)(sR-rS)(Sp-sP)(Ps-pS) =\\ &(Qs-qS)^2(Qp-qP)(Sp-sP) - (Qs-qS)(Qp-qP)(Rp-rP)(Rs-rS)\\ &-(Rp-rP)(Ps-pS)(Qs-qS)(Sp-sP) + (Rp-rP)^2(Ps-pS)(Rs-rS)\end{aligned}$$

qui ſe change en celle-cy :

$$\begin{aligned}o = {}&(Ps-pS)^4 + 2(Qp-qP)(Rs-rS)(Ps-pS)^2 - (Qp-qP)(Qs-qS)^2(Ps-pS) + (Qp-qP)^2(Rs-rS)^2\\ &+(Rp-rP)(Qs-qS)(Ps-pS)^2 + (Rs-rS)(Rp-rP)^2(Ps-pS) - (Qp-qP)(Qs-qS)(Rp-rP)(Rs-rS)\end{aligned}$$

Mais les derniers termes qui ne contiennent pas le facteur $(Ps - pS)$ ſe reduiſent à :

$$(Qp-qP)(Rs-rS)((Qp-qP)(Rs-rS) - (Qs-qS)(Rp-rP))$$

ce qui eſt :

$$(Qp-qP)\,(Rs-rS)\,(Ps-pS)\,(Qr-qR)$$

& partant toute l'equation ſera diviſible par $Ps - pS$ étant :

$$(Ps-pS)^4 \left.\begin{matrix}+2(Qp-qP)(Rs-rS)\\ +(Rp-rP)(Qs-qS)\end{matrix}\right\}(Ps-pS)^2 \left.\begin{matrix}-(Qp-qP)(Qs-qS)^2\\ +(Rs-rS)(Rp-rP)^2\end{matrix}\right\}(Ps-pS) + (Qp-qP)(Qr-qR)(Rs-rS)(Ps-pS)$$

XII. Il eſt aſſés clair, que dans ce cas le facteur $Ps - pS$ étant poſé $= o$, ne peut pas marquer une interſection, & que par conſéquent les interſections des deux courbes propoſées ſeront contenuës dans cette équation :

$$\left.\begin{aligned}&(Ps-pS)^3 + 2(Qp-qP)(Rs-rS)(Ps-pS) - (Qp-qP)(Qs-qS)^2\\ &\quad + (Rp-rP)(Qs-qS)(Ps-pS) + (Rs-rS)(Rp-rP)^2\\ &\qquad + (Qp-qP)(Qr-qR)(Rs-rS)\end{aligned}\right\} = o.$$

Donc dans le cas de deux lignes courbes du troiſieme ordre, les coëfficiens ficients P & p seront constans ; Q & q des fonctions de x d'une dimension comme $\alpha + \beta x$; R & r des fonctions de x de deux dimensions comme $\alpha + \beta x + \gamma x^2$; & S & s des fonctions de x de trois dimensions comme $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$. Par conséquent les facteurs, qui se trouvent dans cette équation seront des fonctions de x :

$Ps - pS$ de 3 dim.	$Qs - qS$ de 4 dim.
$Qp - qP$ d'une dim.	$Qr - qR$ de 3 dim.
$Rs - rS$ de 5 dim.	$Rp = rP$ de 2 dim.

d'où il est evident, que l'équation, qui indique les intersections sera de 9 dimensions, & que par conséquent, en général deux lignes du 3me ordre se peuvent couper en 9 points.

XIII. Ces mêmes équations choisies :

$$Py^3 + Qy^2 + Ry + S = 0$$
$$py^3 + qy^2 + ry + s = 0$$

peuvent aussi montrer le nombre des intersections dans une infinité d'autres cas. Car que la premiere équation exprime une ligne de l'ordre m, & la seconde équation une ligne de l'ordre n, ce qui arrivera, quand les coëfficients seront des fonctions rationnelles entieres de x : savoir

P de $m - 3$ dimens.	p de $n - 3$ dim.
Q de $m - 2$ dim.	q de $n - 2$ dim.
R de $m - 1$ dim.	r de $n - 1$ dim.
S de m dim.	s de n dim.

Alors les facteurs, qui constituënt l'equation, qui ne contient plus la variable y, seront des fonctions de x :

$Ps - pS$ de $m + n - 3$ dim.	$Rp - rP$ de $m + n - 4$ dim.
$Qp - qP$ de $m + n - 5$	$Qr - qR$ de $m + n - 3$
$Rs - rS$ de $m + n - 1$	$Qs - qS$ de $m + n - 2$

Et partant le nombre des intersections de ces deux courbes sera $= 3m + 3n - 9$; qui est toujours plus petit que mn si m & n sont plus grand que 3. Car soit : $m = 3 + \alpha$ & $n = 3 + \beta$, le nombre des intersections sera $= 9 + 3(\alpha + \beta)$ au lieu que $mn = 9 + 3(\alpha + \beta) +$

α β. Mais on voit bien que cette diminution du nombre des interſections vient de ce que les équations choiſies n'expriment pas généralement les courbes des ordres *m* & *n*, mais ſeulement des eſpeces de ces ordres; d'où il n'eſt pas ſurprenant, que le nombre des interſections a été trouvé plus petit, que la propoſition demande.

XIV. Comme l'elimination de l'inconnuë *y* des deux équations cubiques, dont j'ai fait le calcul, a conduit à une équation trop haute, qui n'a été conduite au juſte degré que par la diviſion d'un facteur, dont on pouvoit bien voir qu'il ne renfermoit aucune interſection: ainſi dans les équations, où *y* a plus de dimenſion. on parviendra par l'*elimination* de *y* à une équation encore plus élevée, qui en verité admettra un diviſeur, mais cette methode, qui ſeroit d'ailleurs impracticable dans de plus hautes équations, ne nous mettra pas en ſeureté, ſi l'on trouvera toujours un tel diviſeur, qui ne regarde point les interſections, & encore moins, ſi aprés la diviſion l'équation ſera juſtement d'autant de dimenſions, que la propoſition générale marque; c. à d. ſi le nombre des dimenſions ne ſera jamais plus grand que *mn*, ſi les deux équation propoſées ont été des ordres *m* & *n*. Cette circonſtance prouve donc encore davantage la néceſſité de démontrer la propoſition générale dans toute ſon étenduë, puisque ſans cela on auroit bien de la raiſon de douter de ſa verité.

XV. C'eſt donc principalement de l'ouvrage de l'elimination, que dépend la démonſtration de notre propoſition générale, où il faut prendre garde, que par l'elimination on ne parvienne à une équation, qui renferme des racines inutiles. Car deux équations étant propoſées, dont chacune contient une même variable *y*, qui doit être eliminée, on voit aiſément que l'elimination ſe peut faire d'une infinité de manieres differentes, ſelon qu'on multiplie l'une & l'autre équation par une quantité arbitraire. Il s'agit donc de bien fixer l'idée de l'elimination, & de diriger cette opération, en ſorte que l'equation, à laquelle on arrive, ne contienne d'autres racines, que telles, qui marquent des interſections, & qu'on puiſſe être aſſuré, qu'elle ne renferme des facteurs ſuperflus, dont on pourroit douter s'ils indiquent des interſections, ou non?

XVI. Soient

XVI. Soient donc proposées deux équations quelconques :

$$y^{m} - Py^{m-1} + Qy^{m-2} + Ry^{m-3} - Sy^{m-4} + \&c. = o$$

$$y^{n} - py^{n-1} + qy^{n-2} + ry^{n-3} - sy^{n-4} + \&c. = o$$

lesquelles il faille combiner, en sorte qu'il en résulte une équation qui ne contienne plus la lettre y. Or d'abord on voit que la valeur de y, qui resulte d'une de ces équations doit être égale à la valeur de y, qui résulte de l'autre. Donc si l'une & l'autre équation donne plusieurs valeurs de y, les deux équations proposées pourront subsister ensemble, si une valeur quelconque de y de l'une sera égale à une valeur quelconque de y de l'autre. Supposons que toutes les racines de la premiere équation soient :

$$A, B, C, D, E, F, G \&c.$$

& les racines de l'autre équation :

$$a, b, c, d, e, f, g \&c.$$

Cela posé, il est clair que chacune des deux équations proposées aura lieu dans tous les cas, qu'une des racines de la premiere équation sera égale à une des racines de l'autre.

XVII. Le nombre des racines A, B, C, D &c. de la premiere équation sera $= m$, & le nombre des racines de l'autre équation sera $= n$; donc les équations proposées pourront être répresentées sous ces formes :

$$(y - A)(y - B)(y - C)(y - D)(y - E) \&c. = o.$$

$$(y - a)(y - b)(y - c)(y - d)(y - e) \&c. = o.$$

A' présent il est clair que si $A = a$, la valeur $y = A = a$ satisfera à l'une & à l'autre équation ; la même chose arrivera si $A = b$; ou $A = c$; ou $A = d$; ou $A = e$; &c. de plus la valeur $y = B$ satisfera à l'une & à l'autre, si $B = a$, ou $B = b$; ou $B = c$; ou $B = d$; ou $B = e$; &c. & la valeur $y = C$ satisfera à toutes les deux équations si $C = a$, ou $C = b$; ou $C = c$; ou $C = d$; ou $C = e$; &c. & ainsi des autres. Et il est evident, que toutes ces combinaisons ensemble répresentent tous les cas possibles, où les deux équations proposées pourront subsister à la fois.

XVIII. Donc puisque l'équation, qu'on cherche par l'elimination, doit contenir tous les cas posſibles, où la même valeur miſe pour y ſatisfait à l'une & à l'autre équation à la fois, il eſt clair qu'elle doit contenir tous les cas marqués, & partant elle ſera composée de tous ces facteurs

$$\left.\begin{array}{llllll} (A-a) & (A-b) & (A-c) & (A-d) & (A-e) & \&c. \\ (B-a) & (B-b) & (B-c) & (B-d) & (B-e) & \&c. \\ (C-a) & (C-b) & (C-c) & (C-d) & (C-e) & \&c. \\ (D-a) & (D-b) & (D-c) & (D-d) & (D-e) & \&c. \\ (E-a) & (E-b) & (E-c) & (E-d) & (E-e) & \&c. \\ & & \&c. & & & \end{array}\right\} = o.$$

Donc, puisque la quantité y ne ſe trouve plus dans cette équation, elle ſera la même qu'on cherche par l'elimination, & qui montre tous les cas, où les deux équations propoſées peuvent avoir la même racine. Mais comme les racines A, B, C, D &c. a, b, c, d &c. ſont ſouvent impoſſibles d'être aſſignées, il s'agit d'exprimer cette équation par les coëfficients P, Q, R, S &c. p, q, r, s &c. dont le rapport aux racines eſt connu.

XIX. Parceque, comme nous avons vu, le produit de tous ces facteurs $(y-a)\ (y-b)\ (y-c)\ (y-d)\ (y-e)$ &c. eſt égal à l'expreſſion $y^{n} - py^{n-1} + qy^{n-2} - ry^{n-2} + sy^{n-3}$ — &c. ſi nous ſubſtituons ſucceſſivement pour y les valeurs A, B, C, D &c. l'equation, qui doit réſulter par l'elimination, ſera composée de ces facteurs:

$$\left.\begin{array}{l} (A^{n} - pA^{n-1} + qA^{n-2} - rA^{n-3} + sA^{n-4} - \&c.) \\ (B^{n} - pB^{n-1} + qB^{n-2} - rB^{n-3} + sB^{n-4} - \&c.) \\ (C^{n} - pC^{n-1} + qC^{n-2} - rC^{n-3} + sC^{n-4} - \&c.) \\ (D^{n} - pD^{n-1} + qD^{n-2} - rD^{n-3} + sD^{n-4} - \&c.) \\ (E^{n} - pE^{n-1} + qE^{n-1} - rE^{n-3} + sE^{n-4} - \&c.) \\ \qquad\qquad \&c. \end{array}\right\} = o.$$

où

où le nombre de ces facteurs eſt $= m$, ſelon le nombre des racines de la premiere équation. D'où eſt il evident auſſi que changeant les équations, l'equation, qui reſulte par l'elimination, peut être repréſentée auſſi ſous cette forme :

$$\left.\begin{array}{l}(a^m - Pa^{m-1} + Qa^{m-2} - Ra^{m-3} + Sa^{m-4} - \&c.)\\(b^m - Pb^{m-1} + Qb^{m-2} - Rb^{m-3} + Sb^{m-4} - \&c.)\\(c^m - Pc^{m-1} + Qc^{m-2} - Rc^{m-3} + Sc^{m-4} - \&c.)\\(d^m - Pd^{m-1} + Qd^{m-2} - Rd^{m-3} + Sd^{m-4} - \&c.)\\(e^m - Pe^{m-1} + Qe^{m-2} - Re^{m-3} + Se^{m-4} - \&c.)\\\qquad\qquad\qquad \&c.\end{array}\right\} = o$$

où le nombre des facteurs eſt $= n$.

XX. Quoique les expreſſions des racines A, B, C, D &c. & a, b, c, d &c. ſoient pour la pluſpart fort irrationelles, & ſouvent telles, qu'on ne les peut pas aſſigner ; on ſait pourtant que la ſomme de toutes les racines A, B, C, D &c. eſt $= P$
la ſomme des produits de deux à deux $= Q$
la ſomme des produits de trois à trois $= R$
la ſomme des produits de quatre à quatre $= S$
&c.

Et par ces valeurs P, Q, R, S &c. on eſt en état d'exprimer toutes les expreſſions, dans lesquelles entrent toutes les racines également, par des formules rationnelles compoſées de P, Q, R, S &c. Or on voit aiſément, que ſi l'on multiplie les facteurs mentionnés actuellement, on parviendra toujours à de ſemblables expreſſions, qui renferment toutes les racines également, & au lieu desquelles on pourra mettre des fonctions rationnelles des coëfficients P, Q, R, S &c. & p, q, r, s &c. Cela eſt auſſi clair par la double forme de cette équation du §. preced. Car s'il reſtoit dans la premiere forme quelque irrationalité, ce ſeroit une irrationalité de la premiere équation, mais par la ſeconde forme nous voyons, qu'il n'y peut y avoir une irrationalité de la premiére équation. D'où il s'enſuit, que l'une & l'autre forme doit conduire à la même expreſſion rationnelle, qui ne renferme que les coëfficients P, Q, R, S &c. & p, q, r, s &c.

XXI. Si nous réflechiſſons maintenant, que dans les équations propoſées

$$y^{m} - Py^{m-1} + Qy^{m-2} - Ry^{m-3} + Sy^{m-4} - \&c. = o$$
$$y^{n} - py^{n-1} + qy^{n-2} - ry^{n-3} + sy^{n-4} - \&c. = o$$

entant qu'elles expriment des lignes des ordres m & n les coëfficients P & p marquent des fonctions du premier degré de x comme $\alpha + \beta x$; les coëfficients Q & q des fonctions du ſecond degré $\alpha + \beta x + \gamma xx$; les coëfficients R & r des fonctions du troiſieme degré $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$ &c. Donc la ſomme des racines A, B, C, D &c. ou a, b, c, d, e &c. ſera exprimée par une fonction de x d'un degré. La ſomme des produits de deux à deux de ces racines par une fonction du ſecond degré: la ſomme des produits de trois à trois racines par une fonction du troiſieme degré, & ainſi de ſuite. C'eſt pourquoi dans la compoſition de toutes ces racines dans la premiere forme (§. XVIII.) on pourra regarder chaque racine comme une fonction d'une dimenſion de x: & partant cette forme étant compoſée de mn facteurs ſimples, elle montera à mn dimenſions de x & déſignera par conſéquent mn interſections des deux courbes propoſées.

XXII. S'il y a dans cette démonſtration encore quelque obſcurité, cela vient de ſa grande univerſalité: & tous les doutes qu'on en pourroit avoir évanouïront entierement, dèsqu'on fera l'application à quelques cas particuliers, d'où l'on reconnoitra dabord, que tout ce que je viens d'avancer ſur les dimenſions de chaque partie, doit avoir lieu non ſeulement dans ces cas, mais auſſi en général. Je commencerai par deux équations du ſecond ordre, qui ſoient

	Les racines
$yy - Py + Q = o$	A, B
$yy - py + q = o$	a, b

donc

donc, puisque $m = 2$ & $n = 2$, l'équation, où l'élimination doit conduire, sera :

$$(A^2 - pA + q)(B^2 - pB + q) = o$$

qui étant développée, donnera :

$$A^2B^2 - pAB(A+B) + q(A^2+B^2) + ppAB - pq(A+B) + qq = o$$

Or ayant $AB = Q$ & $A + B = P$, il sera $AA + BB = PP - 2Q$: par consequent l'équation cherchée sera :

$$Q^2 - pPQ + qPP - 2Qq + ppQ - pqQ + qq = o$$

dont chaque terme sera de quatre dimensions de x pourvu que P & p renferment une dimension de x, & Q & q deux.

XXIII. Soient les deux équations proposées du troisiemeordre :

	Les racines étant
$y^3 - Py^2 + Qy - R = o$	A, B, C & $m = 3$
$y^3 - py^2 + qy - r = o$	a, b, c & $n = 3$

Donc l'équation cherchés par l'élimination de y sera :

$$(A^3 - pA^2 + qA - r)(B^3 - pB^2 + qB - r)(C^3 - pC^2 + qC - r) = o$$

qui par le developpement deviendra :

$$\begin{aligned}
&A^3B^3C^3 - pA^2B^2C^2(AB+AC+BC) + qABC(A^2B^2+A^2C^2+B^2C^2) - r(A^3B^3+A^3C^3+B^3C^3)\\
&+p^2A^2B^2C^2(A+B+C) - pqABC(A^2B+AB^2+A^2C+AC^2+B^2C+BC^2) - p^3A^2B^2C^2\\
&+q^2ABC(A^2+C^2+C^2) + pr(A^3B^2+A^2B^3+A^3C^2+A^2C^3+B^3C^2+B^2C^3) + q^3ABC\\
&+r^2(A^3+B^3+C^3) - qr(A^3B+AB^3+A^3C+AC^3+B^3C+BC^3) - r^3\\
&+p^2qABC(AB+AC+BC) + pqr(A^2B+AB^2+A^2C+AC^2+B^2C+BC^2)\\
&-p^2r(A^2B^2+A^2C^2+B^2C^2) - q^2r(AB+AC+BC)\\
&-pq^2ABC(A+B+C) + qr^2(A+B+C)\\
&-pr^2(A^2+B^2+C^2) \qquad = o
\end{aligned}$$

où il faut remarquer que :

$A + B + C = P$	d'une dimension de x
$AB+AC+BC = Q$	de deux dimensions
$ABC = R$	de trois dimensions.

XXIV. Pour les autres expressions on les trouvera formées des coëfficients P, Q, R en sorte :

$A^2 + B^2 + C^2 = P^2 - 2Q$ de 2 dimens.

$A^2B + AB^2 + A^2C + AC^2 + B^2C + BC^2 = PQ - 3R$ de 3 dimens.

$A^3 + B$

$$A^3+B^3+C^3 = P^3-3PQ+3R \text{ de 3 dim.}$$
$$A^3B+AB^3+A^3C+AC^3+B^3C+BC^3 = P^2Q-PR-2Q^2 \text{ de 4 dim.}$$
$$A^2B^2+A^2C^2+B^2C^2 = Q^2-2PR \text{ de 4 dim.}$$
$$A^3B^2+A^2B^3+A^3C^2+A^2C^3+B^3C^2+B^2C^3 = PQ^2-2P^2R-QR \text{ de 5 dim.}$$
$$A^3B^3+A^3C^3+B^3C^3 = Q^3-3PQR+3RR \text{ de 6 dim.}$$

d'où l'on voit clairement, puisque p, q, & r sont des fonctions d'une, 2 & 3 dimensions de x, que tous les termes renferment le même nombre de dimensions de x, & que ce nombre est $=9$, comme l'enoncé de la proposition exige. Or cette substitution donnera l'equation suivante par l'elimination de la variable y:

$$\begin{aligned}
&+R^3-pQR^2+qQ^2R-2qPR^2-rQ^3+3rPQR-3rR^2\\
&-r^3+qr^2P-q^2rQ+2pr^2Q+q^3R-3pqrR+3r^2R\\
&+p^2PR^2-pqPQR+3pqRR+prPQ^2-2prP^2R-prQR+q^2P^2R\\
&-pr^2P^2+pqrPQ-3r^2PQ-pq^2PR+2p^2rPR+qrPR-p^2rQ^2\\
&\qquad\qquad+rrP^3-2qqQR-qrP^2Q\\
&\qquad\qquad-p^3R^2+2qrQQ+ppqQR = 0.
\end{aligned}$$

XXV, Cet exemple servira à nous convaincre en général, si les deux équations proposées sont:

$$y^m-Py^{m-1}+Qy^{m-2}-Ry^{m-3}+Sy^{m-4}\dots\pm V=0$$
$$y^n-py^{n-1}+qy^{n-2}-ry^{n-3}+sy^{n-4}\dots\pm v=0$$

où P & p sont des fonctions d'une dimension de x; Q & q de deux; R & r de trois &c. & les derniers termes V de m dimensions & v de n dimensions: que le premier terme, que l'equation du §. XIX. résultante par l'elimination fournit, sera $A^n B^n C^n D^n$ &c. $= V^n$ & partant de mn dimensions de x, & puisqu'on voit aussi clairement, que tous les autres termes pouvant être exprimés par les lettres P, Q, R &c. & p, q, r &c. doivent contenir le même nombre de dimensions de x, il est incontestablement démontré, que l'equation, à laquelle on parvient par l'elimination de la lettre y, sera de mn dimensions de x: tout comme la proposition générale avance.

SUITE