L'élimination en algèbre aux XVII^{e} et XVIII^{e} siècles*

Erwan Penchèvre†

L'expression « théorie de l'élimination » semble apparaître en premier lieu dans des travaux algébriques de Lagrange et de Bézout à la fin du XVIII^{e} siècle, puis connaître un grand succès au XIX^{e} siècle. L'une des méthodes qu'ils désignaient sous ce terme date du XVII^{e} siècle : la méthode d'élimination successive des plus hautes puissances de l'inconnue au moyen de l'algorithme euclidien du plus grand commun diviseur de deux polynômes, méthode que nous attribuons à Hudde. Dans un premier temps, nous survolerons les travaux de quelques auteurs du XVII^{e} siècle sur ce sujet, et nous verrons aussi comment la géométrie cartésienne conditionna la formulation du « théorème de Bézout » (deux courbes de degrés m et n se coupent en mn points) par Newton, puis MacLaurin avec l'éclosion du concept de multiplicité d'intersection. Nous suivrons ensuite les tentatives de démonstration et de généralisation du « théorème de Bézout » par des auteurs du XVIII^{e} siècle qui donnèrent, à cette occasion, de nouvelles méthodes d'élimination. L'élimination étant à la fois théorie et moyen, nous observerons au long du parcours comment difficulté technique et difficulté conceptuelle se chevauchèrent. Enfin, dans une seconde partie de l'exposé, nous reviendrons sur la naissance de la théorie de l'élimination au XVII^{e} siècle et tenterons d'en expliquer les conditions.

Développement de la théorie, difficulté technique et conceptuelle

Deux motivations essentielles pour le développement de la théorie de l'élimination algébrique aux XVII^{e} et XVIII^{e} siècles furent les tentatives de résolution algébrique des équations et l'étude des courbes algébriques. La première méthode générale d'élimination algébrique que nous ayons trouvée est décrite dans les *Miracula Arithmetica* (1622) du mathématicien allemand Johannes Faulhaber, qui cherchait à généraliser aux degrés supérieurs une méthode de résolution algébrique des équations de degré 4. On voit dès lors apparaître un thème récurrent : la difficulté des calculs d'élimination. Faulhaber écrit :

*Paru dans *Historia Scientiarum* vol. 14–2 (2004).

†Unité de recherche CNRS UMR 7062, Centre d'Histoire des Sciences et des Philosophies Arabes et Médiévales, 7 rue Guy Moquet, BP 08, 94801 Villejuif, France.

> Le fait que nous autres mortels ne puissions résoudre les équations de tous degrés avec une règle, indéfiniment, ce n'est pas la faute de l'art, mais plutôt de notre ignorance et de notre faiblesse.[1]

L'impossibilité de résoudre l'équation de degré 5 ne serait pas due à l'algèbre (*die Kunst*). L'algèbre ne manque pas de moyens : Faulhaber expose, suite à cela, une méthode d'élimination. C'est donc à la faiblesse humaine qu'il faut s'en prendre, incapable de mener le calcul. Pourtant la méthode proposée par Faulhaber est encore imparfaite. Son idée se résume à numéroter les équations successives L_i qu'il obtient par le calcul (en commençant par les deux premières équations, données), et à appliquer à chaque étape une opération de la forme[2] :

$$L_{i+1} = (\text{monôme})L_i + (\text{monôme})L_j$$

A cet égard, Jan Hudde, dans son *Epistola prima de reductione aequationum*, publiée en 1657 dans l'édition latine de la *Géométrie* de Descartes, semble marquer un point, en comprenant que l'algorithme euclidien pour la recherche du plus grand commun dénominateur, appliqué aux polynômes (comme l'avait déjà proposé Stévin dans son *Arithmétique* en 1585), permet aussi d'éliminer successivement les plus hautes puissances de l'inconnue et peut donc servir de méthode générale d'élimination[3]. Insistons un instant sur la nouveauté et l'importance d'une telle méthode générale : les systèmes d'équations à plusieurs inconnues n'étaient pas un problème nouveau, mais il ne s'agissait plus ici de traiter une classe particulière de tels systèmes (systèmes d'équations linéaires, problèmes indéterminés dont on cherche des solutions rationnelles en analyse diophantienne rationnelle, problèmes d'arithmétique entière, etc.). Albert Girard (indépendamment de Faulhaber) était peut-être déjà conscient de cet enjeu en 1629, lorsque, content d'avoir fait progresser les méthodes de résolutions des systèmes d'équations à deux inconnues présentes dans le chapitre 10 de l'*Ars Magna* de Cardan et exposées par Stévin dans son *Arithmétique* en 1585, il s'exclamait : « c'est ici où ils se sont arrestez [=Cardan et Stévin], mais nous achèverons et passerons au travers de ce nuage »[4].

Bien que Descartes n'eût pas de méthode générale d'élimination, c'est pour montrer les généralisations possibles de sa méthode des tangentes d'une part, et de sa méthode de résolution algébrique des équations de degré 4 d'autre part,

[1] « das wir sterbliche Menschen nicht alle Cossen Reguliert... unendtlich aufflösen könden / ist solches gar nicht der Kunst / sondern unser unwissenheit und Schwachheit schuldt », [12], p. 70. Sur l'oeuvre algébrique de Faulhaber, cf. [29].

[2] cf. [12], p. 70–73. Quant à la nouveauté de cette méthode, Faulhaber remarque : « dise Kunst zu unserer letsten zeit in Teutscher Sprach vil höher gestigen / weder man sonsten in keiner Sprach zeigen kan ».

[3] cf. [18]. L'algorithme est exposé p. 422. Cf. aussi son application à la résolution d'un système d'équations p. 487–488, pour calculer une réduite de degré 15 d'une équation de degré 6 au moyen de la méthode des coefficients indéterminés. Pour un exposé postérieur plus accessible, on peut aussi consulter Lagrange [23], § 11, ainsi que [30]. Fermat était en possession d'une méthode d'élimination peu différente dès 1650, comme en témoigne le texte *Novus secundarum et ulterioris ordinis in analyticis usus* qu'il envoya à Carcavi, cf. [13], tome I, p. 181–184. Il ne semble pourtant pas avoir fait le lien avec l'algorithme euclidien.

[4] [15], f. F4r et Gr.

au moyen de la méthode des coefficients indéterminés, que Hudde fournit une telle méthode d'élimination[5].

C'est aussi la méthode de Hudde qu'exposa Newton dans ses *Lectures on Algebra* (1670–1684), en la formulant ainsi :

> Quand chacune des équations est de degré supérieur à un en la quantité à éliminer, la valeur de sa plus haute puissance doit être déterminée dans chacune ; ensuite, si ces puissances ne sont pas les mêmes, l'équation de plus bas degré doit être multipliée par la quantité à éliminer, ou par son carré, ou son cube, etc. pour qu'elle devienne de même degré que l'autre équation. Alors les valeurs de ces puissances doivent être posées égales l'une à l'autre, et il en résulte une nouvelle équation de degré inférieur en la quantité à éliminer. Et en itérant cette opération, cette quantité disparaîtra finalement complètement.[6]

En tout cas, la méthode de Hudde fit date. Elle fit l'objet de recherches combinatoires profondes de la part de Leibniz. Pourtant Leibniz critiqua l'approche de Hudde, trop « laborieuse ». Face aux « calculs immenses », dont seuls les résultats sont consignés dans des « tables » dans l'*Epistola prima*, pour étudier différents cas de l'équation générale de degré 6 au moyen d'une « équation réduite » de degré 15 (elle-même obtenue par la méthode d'élimination), Leibniz écrit (en 1675) :

> Je conviens que Hudde ait mis au jour, avec beaucoup d'esprit, une adresse remarquable et un travail immense, une table à l'aide de laquelle, en la parcourant entièrement, puisse être connu si une équation rationnelle quelconque de degré 5 ou 6 a ou non des diviseurs ; mais qui tiendra tant à une quelconque équation qu'il mènera un tel examen au prix d'un travail incroyable, et qu'en sera-t-il, après, pour les équations plus élevées, quand la table ainsi construite sera d'une longueur immense...[7]

Pour résoudre cette difficulté calculatoire, Leibniz chercha, plutôt qu'un algorithme d'élimination, une *formule* pour l'équation finale résultant de l'élimi-

[5]La lettre de Descartes à Carcavi du 17 août 1649 (cf. [7], t. V, p. 392–393) dans laquelle Descartes exprime son incompréhension de la méthode d'élimination des radicaux (*asymetria*) de Fermat, témoigne du fait que Descartes n'avait pas de méthode *générale* d'élimination des inconnues (la méthode d'élimination des radicaux de Fermat repose en effet sur sa méthode d'élimination des inconnues, proche de celle de Hudde).

[6]cf. [28], vol. V, p. 122 : « Cum in neutra aequatione tollenda quantitas unius tantum dimensionis existit valor maximae potestatis ejus in utraque quaerendus est ; deinde si potestates istae non sint eaedem, aequatio potestatis minoris multiplicanda est per tollendam quantitatem aut per ejus quadratum aut cubum etc. ut ea evadat ejusdem potestatis cum aequatione altera. Tum valores illarum potestatum ponendae sunt aequales et aequatio nova prodibit ubi maxima potestas sive dimensio tollendae quantitatis diminitur. Et hanc operationem iterando quantitas illa tandem auferetur ».

[7]cf. [24], p. 698 : « Fateor, Huddenium summo ingenio ac miris artibus immensoque labore tabulam inde eruisse, cujus ope omnia pertentando sciri possit, an aequatio aliqua rationalis quinti sextique gradus sit divisibilis ; sed quis tanti putabit ullam aequationem, ut per tot examina incredibili labore ducat, et quid futurum putamus in altioribus, ubi tabula ipsa ad hunc constructa modum immensae magnitudinis futura esset... »

nation. Il étudia à cet effet les propriétés d'homogénéité de l'équation finale[8]. Son approche, originale, est d'ailleurs semblable à celle qu'il adopta dans ses recherches sur la résolution algébrique des équations de degré supérieur à 4 : il s'agissait alors de faire une conjecture sur la forme des racines.

L'élimination des plus hautes puissances de l'inconnue inspirerait encore les travaux de Bézout (1764, 1779), qui lui aussi trouverait sa motivation initiale dans la recherche d'une méthode de résolution algébrique des équations de degré supérieur à 4.

Parallèlement à la recherche d'une méthode générale d'élimination, certains mathématiciens du XVII^e siècle, dans le cadre de la géométrie analytique, furent conduits à formuler le théorème dit aujourd'hui « de Bézout ». L'extension, par Descartes, du domaine de la géométrie analytique à des courbes de degré élevé s'accompagnait de l'échec d'une classification des problèmes et des courbes par « genre », fondée d'une part sur un principe déjà admis des « anciens », les problèmes étant classés suivant les courbes qu'on emploie pour les construire[9], et d'autre part sur un principe original, les courbes étant classées suivant la « composition » des mouvements des outils qui permettent de les tracer ; cette classification devait de plus se prêter à une traduction algébrique, faisant intervenir le degré des équations (équations à une inconnue pour les « problèmes », équations à deux inconnues pour les courbes). Par exemple, les problèmes se traduisant par des équations de degré 3 ou 4 en l'inconnue cherchée appartiennent à une même classe, pour autant que la résolution des équations de degré 3 ou 4 puisse se faire au moyen de courbes planes de degré 2 (sections coniques, descriptibles au moyen d'un « compas » particulièrement simple). La critique du système cartésien, par Fermat d'abord, dans sa *Dissertatio tripartita*[10], ne sut produire que des contre-exemples particuliers. « Chez Descartes, nous dit Fermat, les problèmes de degrés 8 ou 7 nécessitent des courbes de degrés 5 ou 6, ceux de degrés 10 ou 9 des courbes de degré 7 ou 8,..., et ainsi de suite à l'infini ; que ces cartésiens voient comme c'est loin de la simplicité et de la vérité géométrique ». Fermat montre par exemple comment construire toute équation de degré $2n$ au moyen de deux courbes de degré n (et de l'extraction d'une racine carrée) ; puis il donne des exemples d'équations de degré n constructibles par deux courbes de degrés $\leq \sqrt{n}+1$: ainsi l'extraction de $m(m+1)$ moyennes proportionnelles (équation de degré $m(m+1)+1$) peut se faire par l'intersection de deux courbes de degré $(m+1)$; enfin il ajoute que la résolution des équations de la forme $x^{pq}=a$ se ramène à l'intersection de deux courbes de degrés p et q. Mais bientôt, en 1688, toujours dans le cadre de la critique du système cartésien, Jacques Bernoulli écrit :

---

[8] Nous ne reviendrons pas ici sur les travaux de Leibniz, déjà connus grâce à E. Knobloch, cf. [21], [25], et [22]. Mentionnons simplement [25], manuscrit n°56 (1692–1693), p. 248, l. 48–60, où Leibniz décrit les propriétés d'homogénéité de l'équation finale, auxquelles il semble être parvenu de manière empirique, mais desquelles découle immédiatement le « théorème de Bézout » pour deux équations.

[9] cf. [7], t. VI, p. 388.

[10] cf. [13], t. I, p. 118–131. Voir aussi la lettre de Fermat à Digby [14], p. 491–497, et [34] pour une analyse de la *Dissertatio tripartita*.

> Je pense qu'il n'est pas difficile de démontrer que des courbes de n'importe quel genre sont aptes à la construction d'équations d'autant de dimensions, qu'en compte le carré du nombre de dimensions, auxquelles montent les équations exprimant la nature de ces courbes.[11]

Il s'agit d'un cas particulier du « théorème de Bézout ». Dans un brouillon de Newton, datant des années 1666–1671, dans le cadre de ses recherches sur la classification des cubiques d'une part, et sur la géométrie analytique (préparant le *Tractatus de methodis serierum et fluxionum* de 1670–1671) d'autre part, Newton explore cette même direction et formule, pour la première fois à notre connaissance, le théorème dit « de Bézout » pour deux courbes algébriques planes, tout en indiquant le lien naturel entre ce théorème et l'élimination :

> Etant données deux courbes, trouver leurs points d'intersection. C'est plus un principe qu'un problème. Mais plutôt susceptible d'une solution algébrique que d'une solution géométrique, et on le fait en éliminant une des deux inconnues des équations. D'où il apparaîtra qu'il y a autant de points d'intersection que le rectangle des dimensions des courbes. [12]

Ce théorème va former, au XVIII$^{\text{e}}$ siècle, la clef de voûte des recherches sur l'élimination algébrique. Dans le cas de deux équations, il est souvent attribué à MacLaurin, et dans le cas d'un nombre quelconque d'équations, à Bézout, ainsi que sa démonstration. Mais le théorème de Bézout, comme on vient de le dire était déjà là quand MacLaurin, en 1720, publia sa *Geometria Organica*. Cet ouvrage fut pourtant crucial dans la compréhension du théorème de Bézout : on y voit apparaître le décompte des points d'intersection de deux courbes *avec leur multiplicité* dans l'application de ce théorème. Ceci suppose une classification (encore grossière) des singularités des courbes algébriques et un concept (pas encore nommé) de multiplicité d'intersection $I(\mathcal{C}, \mathcal{D}; P)$ de deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ en un point P, avec, en filigrane, la formule :

$$I(\mathcal{C}, \mathcal{D}; P) \geq \mu_{\mathcal{C}}(P).\mu_{\mathcal{D}}(P)$$

où $\mu_{\mathcal{C}}(P)$ désigne l'ordre de multiplicité du point P sur la courbe $\mathcal{C}$. Le théorème de Bézout s'énonce alors :

$$\sum_{P \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}} I(\mathcal{C}, \mathcal{D}; P) = \deg(\mathcal{C}).\deg(\mathcal{D})$$

Enfin, dans le cadre traditionnel de la construction organique des courbes, le théorème de Bézout permet à MacLaurin un nouveau genre de preuves purement géométriques, que reprendra Poncelet, en 1822, dans la dernière section

[11] cf. [1] : « Existimo namque, demonstratu haud difficile esse, quod cujuslibet generis curvae aptae sint ad construendas Aequationes tot dimensionum, quot indigat quadratum numeri dimensionum, ad quas ascendunt Aequationes, curvarum illarum naturam exprimentes ».

[12] cf. [28], t. II, p. 177 : « Datis duabus curvis invenire puncta intersectionis. this is rather a principle than a probleme. But rather propounded of the Algebraicall then geometricall solution and that is done by eliminating one of the two unknown quantitys out of the equations. From whence it will appear that there are so many cut points as the rectangle of the curves dimensions. »

de son *Traité des propriétés projectives des figures*[13]. Certaines des méthodes exposées par MacLaurin pour construire des courbes ayant des singularités données au moyen de courbes de degrés inférieurs peuvent s'interpréter comme des transformations birationnelles du plan. Ainsi par exemple, il montre comment transformer une courbe de degré $2n$, ayant trois points singuliers d'ordre n et un quatrième d'ordre $(n-1)$, successivement en une courbe de degré n ayant seulement un point singulier d'ordre $(n-1)$, puis en une courbe de degré $(n-1)$ ayant un point singulier d'ordre $(n-2)$, etc., jusqu'à obtenir une droite[14]. Il sait d'autre part que la courbe de degré $2n$, ayant trois points singuliers d'ordre n et un d'ordre $(n-1)$, ne peut avoir d'autre point singulier. Enfin, il démontre qu'un courbe de degré n ne peut avoir plus de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles[15]. L'objectif de MacLaurin était de classer les courbes algébriques (sur le modèle de l'*Enumeratio* de Newton pour les cubiques) au sein de chaque degré, suivant la position des asymptotes, mais surtout suivant le nombre et la nature des points singuliers, ainsi que de fournir des procédés mécaniques pour tracer une courbe donnée par son degré et par un certain nombre de conditions, un certain nombre de points donnés devant appartenir à la courbe, éventuellement des points singuliers d'ordre de multiplicité donné. Il était donc conduit, nécessairement, à se poser la question : combien de points déterminent une coube ? C'est dans ce cadre qu'il se heurta au « paradoxe de Cramer ». Sans entrer dans les détails de ce « paradoxe » qui n'acquit toute son importance qu'au XIX^e^ siècle, nous ferons simplement une remarque à ce sujet : le « paradoxe » montre que, dans certains cas, un système de N équations linéaires à N inconnues n'a pas une solution *unique*. Il y a certes rupture avec un principe communément admis au XVII^e^ siècle. C'est Cramer qui utilisera, en 1750, le terme de « paradoxe » pour désigner ce fait. Pourtant, il en expliquera lui-même la cause : les formules (dites aujourd'hui « formules de Cramer ») exprimant la solution d'un tel système par des déterminants peuvent prendre la forme « indéterminée » $\frac{0}{0}$! Mais « ce qui est fâcheux, écrit-il, c'est qu'on ne le puisse voir intuitivement que par un calcul immense »[16]. La théorie de l'élimination dans les systèmes d'équations linéaires n'avait pas encore atteint la perfection désirable. Euler, sollicité par Cramer, explique le « paradoxe » par l'existence de relations de dépendance linéaire entre les N équations. Il a même l'idée de compter le nombre de ces relations.

Revenons à MacLaurin. Dans son oeuvre se pose déjà la question de la démonstration du « théorème de Bézout » : il prétend l'avoir démontré dans un supplément non publié à la *Geometria Organica*, qui n'a pas été retrouvé. Deux concurrents de MacLaurin, Braikenridge et George Campbell, prétendent aussi en avoir une démonstration[17]. Mais il faut attendre les ouvrages d'Euler (1748)

---

[13]cf. [32], t. 1, section IV, par exemple § 475. Poncelet donnera à cette occasion (au § 598) une démonstration géométrique du théorème de Bézout, au moyen de son « principe de continuité », en faisant « dégénérer » l'une des deux courbes « par succession insensible » en une réunion de droites.

[14]cf. [26], partie II, section V, prop. XXV et XXVII, p. 137–139.

[15]cf. [26], p. 137.

[16]cf. [11], I–26, p. XII.

[17]Braikenridge écrit dans [4] : « *Cl. Geometra D. Georgius Campbel* inter plurima alia eximia inventa, quae ob summam ejus modestiam apud eum latent, hujus theorematis prae-

et Cramer (1750) pour lire les premières démonstrations parues. A l'instar du théorème fondamental de l'algèbre, de nombreuses démonstrations du théorème de Bézout vont voir le jour, posant aussi plusieurs problèmes conceptuels.

On distingue dès les premières démonstrations deux voies possibles. La première, illustrée par Euler dans un mémoire en 1748, puis par Cramer dans son traité *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* en 1750, ne semblait d'abord pouvoir s'appliquer qu'au cas de deux équations $\left\{ \begin{array}{l} P(x) = 0 \\ Q(x) = 0 \end{array} \right.$, et supposait données les racines (a_i) d'une de ces deux équations, soit $P(x) = 0$. L'équation finale résultant de l'élimination de x (nommée aujourd'hui « résultant de P et Q ») est alors $\prod_i Q(a_i) = 0$. Les coefficients des deux équations peuvent renfermer une autre inconnue y. Ainsi pour deux équations à deux inconnues x, y, l'équation finale résultant de l'élimination de x est un polynôme en y, et l'on calcule son degré au moyen d'une étude combinatoire sur les fonctions symétriques des racines (a_i) (étude menée à bien en détails seulement par Cramer). Les racines de l'équation finale correspondent géométriquement à la projection sur l'axe des ordonnées des points d'intersection des deux courbes d'équations données. On peut s'assurer que ces racines sont distinctes au moyen d'un changement générique d'axes de coordonnées[18]. Le lien conceptuel entre intersection, projection et élimination est particulièrement étudié, et étendu au cas de l'intersection de deux surfaces dans l'espace, par Euler[19]. Se posent aussi la question des points imaginaires, celle des intersections impropres (Euler remarque que deux courbes peuvent avoir des composantes communes, et donc une infinité de points communs), celle des « contacts » (points de contact, « lignes de contact » entre deux sufaces). L'utilisation des fonctions symétriques des racines pour l'élimination algébrique sera poursuivie par Lagrange, qui, en 1770–1771, étudiera plus généralement les fonctions des racines invariantes par certaines permutations, dans ses *Réflexions sur la résolution algébrique des équations.* C'est aussi dans ce mémoire qu'est énoncé pour la première fois (à notre connaissance) le théorème de Bézout pour un système de n équations de degrés quelconques à $(n-1)$ inconnues, dont il sera question ci-dessous[20].

La deuxième voie possible est aussi ouverte par Euler en 1748 (dans son *Introductio in analysin infinitorum*), toujours dans le cas de deux équations $\left\{ \begin{array}{l} P(x) = 0 \\ Q(x) = 0 \end{array} \right.$. Elle ne suppose plus les racines de $P(x) = 0$ comme données, mais postule que l'équation finale est une équation de la forme $PR + QS = 0$ de degré minimal. On cherche alors à déterminer les polynômes R et S au moyen de la méthodes des coefficients indéterminés – il faut au préalable déterminer

claram habet demonstrationem, in lucem brevi ut spero prodituram ». Braikenridge et George Campbell furent tous deux engagés dans des controverses avec MacLaurin.

[18]cf. [5], § 42.

[19]cf. [9], t. 2, chap. XIX, et le chap. VI de l'appendice sur les surfaces.

[20]cf. [23], § 14. Pour une analyse du mémoire de Lagrange, cf. [17], p. 44–49. Edward Waring, dans la préface à la seconde édition de ses *Meditationes algebraicae* (1782), prétend avoir aussi fait connaître ce théorème général dans la première édition (1770) de son ouvrage, que je n'ai hélas pas encore pu consulter (cf. [39], p. xxxv).

leurs degrés – et l'on est ainsi ramené à un problème linéaire. Cette approche se trouvait aussi dans les brouillons de Leibniz[21]. On peut y voir un écho du « théorème de Bézout arithmétique »[22] qui affirme que le plus grand commun dénominateur de deux entiers p et q peut s'écrire sous la forme $pr+qs$. Elle sera poursuivie par Bézout, qui tentera (d'abord sans succès en 1764) de l'étendre au cas d'un nombre d'équations supérieur à 2. En imposant la recherche d'une équation *de degré minimal*, cette approche soulève le problème des « facteurs superflus » que tout calcul d'élimination risque de faire apparaître dans l'équation finale. Ce problème avait d'ailleurs dû se poser à tout lecteur attentif de l'*Arithmetica Universalis* de Newton : l'algorithme euclidien fait en effet apparaître de tels facteurs, mais les formules données par Newton pour les résultants de certains polynômes de bas degrés sont débarassés des facteurs superflus, et il reste silencieux quant à la méthode employée pour les calculer (ou pour supprimer les facteurs superflus après le calcul). Certains travaux d'Euler sur l'élimination tentent de restituer la méthode utilisée par Newton pour éviter les facteurs superflus, sans toutefois parvenir à une solution générale[23]. Le problème des facteurs superflus dut arrêter Bézout pendant longtemps dans sa recherche d'une méthode générale d'élimination des inconnues pour un nombre quelconque d'équations. Il explique dans un mémoire de 1764 que la méthode consistant à éliminer en comparant les n équations d'un système ($n > 2$)

$$\begin{cases} P_1 = 0 \\ \vdots \\ P_n = 0 \end{cases}$$

successivement deux à deux conduit à des facteurs superflus particulièrement difficiles à repérer, et conclut : « Mais quel est le fil qui conduirait dans ce labyrinthe ? »[24]. La méthode qu'il adopte dans ce mémoire consiste alors à chercher un nouveau système d'équations résultant de l'élimination d'*une* inconnue, et dont chacune est de la forme $P_1R_1 + ... + P_nR_n = 0$, de degré minimal. Il réitère ce procédé pour éliminer toutes les inconnues, l'une après l'autre. Cette approche est encore imparfaite et ne permet pas d'éviter tout facteur superflu.

[21] cf. [25], par exemple le manuscrit n°54 (1684–1694), p. 238, l. 176–188.

[22] Le théorème de Bézout arithmétique était déjà connu de Bachet de Méziriac, en 1612, cf. [19], p. 22–23 et 193–194. R. Rashed a montré la forte probabilité qu'Ibn al-Haytham (965–1040) ait connu « de quelque manière » ce théorème (cf. [33], « Ibn al-Haytham et le théorème de Wilson », p. 227–243).

[23] Euler expose cette méthode plusieurs fois, dans [8], [9] et [10]. Il précise dans [10] qu'elle est « celle dont Mr. Newton paraît s'être servi ». Nous n'en avons pas trouvé trace dans les travaux de Newton, par contre Leibniz l'utilisait (cf. [22], p. 161). Whiteside a lui aussi tenté de restituer le calcul du résultant de deux polynômes de degré 3, au moyen de deux brouillons de Newton de la période 1720–1722 (premier brouillon : [28], vol. V, p. 518–519 ; deuxième brouillon vol. VIII, p. 461–466 ; restitution de Whiteside : vol. V, p. 519, note 7). Mais cette restitution semble être erronée, l'équation finale ainsi obtenue (que Whiteside n'a pas calculée) étant identiquement nulle !

[24] cf. [2], p. 290. Euler aussi semble être frappé de confusion dans un calcul visant à démontrer le théorème de Bézout : « le calcul conduit à des formules si compliquées que l'on en perd patience », écrit-il à Cramer en 1750 (cité par J. J. Gray [16], p. 190).

C'est pourtant en y restant fidèle, et en en trouvant l'expression ultime, qu'il parvient, en 1779, au concept d'« Equation-somme » :

> Nous concevons qu'on multiplie chacune des équations données, par un polynôme particulier, et qu'on ajoute tous ces produits. Le résultat sera ce que nous appellerons l'*Equation-somme*, laquelle deviendra l'équation finale par l'anéantissement de tous les termes affectés des inconnues qu'il s'agit d'éliminer.[25]

Autrement dit, Bézout postule que l'équation finale résultant de l'élimination *de toutes les inconnues sauf une* dans un système de n équations à n inconnues est une équation de degré minimal, de la forme $P_1R_1+...+P_nR_n = 0$. Cette méthode n'a plus le caractère itératif des méthodes précédentes (élimination successive des plus hautes puissances de l'inconnue ; comparaison des équations deux à deux ; élimination des inconnues l'une après l'autre ;...). Mais le problème est alors de déterminer, d'abord, le degré des « polynômes multiplicateurs » R_i, ainsi que le degré de cette équation finale. C'est là le « noeud de la difficulté » nous dit Bézout. Et c'est là qu'intervient le théorème général de Bézout, affirmant que l'équation finale résultant de l'élimination de $(n-1)$ inconnues dans un système de n équations *génériques* a pour degré le produit des degrés des équations proposées.

Le concept d'équation-somme étant proche du concept d'idéal (introduit par Kummer en 1844), il n'est peut-être pas inutile de donner une idée de la démonstration de ce théorème, faite par Bézout en 1779, traduite dans un langage plus moderne. Soient $f_1, ..., f_n$ des polynômes homogènes génériques à $(n+1)$ indéterminées de l'anneau gradué $C = k[X_0, ..., X_n]$ (où k est un corps), de degrés respectifs $k_1, ..., k_n$. Soit l'idéal $I = (f_1, ..., f_n)$. Il s'agit d'éliminer $(n-1)$ parmi les n rapports indéterminés $\frac{X_i}{X_0}$ dans le système d'équations homogènes :

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ \vdots \\ f_n = 0 \end{cases}$$

La détermination du degré de l'équation finale par Bézout, faite par récurrence, et en comptant le nombre de « coefficients arbitraires » et le nombre de « coefficients inutiles » – notions correspondant respectivement au nombre d'inconnues et à la dimension de l'espace vectoriel des solutions lors de l'application de la méthode des coefficients indéterminés – le conduit en fait à calculer la dimension de certains espaces vectoriels, composantes homogènes de l'anneau C ou de ses quotients. Il aboutit à l'expression suivante du « degré de l'équation finale » (où r est un entier suffisamment grand, l'expression étant alors constante)[26] :

$$(*) \quad \dim(C/I)_r = \dim C_r - \sum \dim C_{r-k_\alpha} + \sum \dim C_{r-k_\alpha-k_\beta} - ... + (-1)^n \dim C_{r-k_1-...-k_n}$$

[25] cf. [3], § 224.

[26] cf. [3], § 62, où Bézout démontre en fait un résultat plus général, portant sur une classe d'équations plus large (les « équations incomplètes de première espèce », dans la classification de Bézout), et contenant comme cas particulier celle des équations génériques (les « équations complètes »). Aux § 42–48, il donne une autre démonstration restreinte aux équations génériques, mais difficilement traduisible en langage moderne !

On pourrait montrer que le raisonnement de Bézout repose sur l'exactitude de la suite :

$$0 \quad \to \quad (C/(f_2,...,f_n))_{r-k_1} \quad \xrightarrow{f_1} \quad (C/(f_2,...,f_n))_r \quad \to \quad (C/(f_1,f_2,...,f_n))_r \quad \to \quad 0$$

où la première flèche désigne la multiplication par f_1, et la deuxième la projection canonique. Fait non trivial sur lequel Bézout ne s'explique pas. Ceci revient à démontrer que le « complexe de Koszul » suivant, associé à la suite $(f_1,...,f_n)$ est exact[27] :

$$0 \to C_{r-k_1-...-k_n} \to \ldots \to \bigoplus C_{r-k_\alpha-k_\beta} \to \bigoplus C_{r-k_\alpha} \to C_r \to (C/I)_r \to 0$$

D'ailleurs, la formule $(*)$ découle immédiatement de l'exactitude du complexe de Koszul. Au moyen du calcul aux différences finies et de $(*)$, Bézout montre finalement que $\dim(C/I)_r = k_1 k_2 ... k_n$.

La structure du traité de Bézout est compliquée. Il n'introduit en fait son concept d'équation-somme que dans la deuxième partie (« livre second »), restant proche dans la première de la méthode d'élimination des plus hautes puissances de l'inconnue héritée du XVII$^{\text{e}}$ siècle (peut-être était-il conscient que la *nouveauté* de sa propre méthode allait poser problème). Enfin il ne se limite pas à la considération des équations génériques (qu'il traite en premier, aux § 42–48), mais étudie des classes d'équations de plus en plus vastes, obtenues en imposant que certains coefficients soient nuls, ou vérifient certaines conditions. Pour ces classes d'équations, le théorème énoncé ci-dessus ne donne qu'une majoration du degré de l'équation finale, degré que Bézout tente de calculer exactement dans chaque cas. Il en résulte un travail aux proportions gigantesques, ordonné suivant un gradient de généralité croissante, et laissant comprendre que le cas des équations génériques n'est qu'un cas très particulier. Bézout nous prévient :

> Quelque idée que nos lecteurs aient pu se faire déjà de l'étendue de la matière que nous entreprenons de traiter, celle qu'il en prendra par la suite, surpassera probablement la première.[28]

L'oeuvre de Bézout offre une solution concrète au problème technique de l'élimination, toutes les étapes du calcul étant représentées par une unique « équation-somme » et ainsi réduites à l'application de la méthode des coefficients indéterminés et à la résolution d'un unique système d'équations *linéaires*, mais elle offre aussi une avancée conceptuelle nous rapprochant de la théorie des idéaux. Pourtant l'exposé de Bézout manque de rigueur, et fut perçu comme tel par Poisson, qui écrivit en 1802, au sujet du théorème de Bézout :

> Ce théorème important est dû à Bézout ; mais la manière dont il l'a démontré n'est ni directe, ni simple, et même elle n'est pas exempte de toute difficulté.[29]

Plutôt que de corriger l'oeuvre de Bézout, Poisson préfère revenir à la méthode qu'avait utilisée Cramer dans le cas de deux équations, et la généralise au cas

[27]cf. [20], p. 21–24, pour l'exactitude du complexe de Koszul.
[28]cf. [3], § 52.
[29]cf. [31], p. 199.

d'un nombre quelconque d'équations. Soit donc un système de n équations (non homogènes) à n inconnues, de degrés respectifs k_1,...,k_n :

$$\begin{cases} P_1(x, y, ..., u) = 0 \\ \vdots \\ P_n(x, y, ..., u) = 0 \end{cases}$$

En éliminant de toutes les manières possibles $(n-2)$ parmi les $(n-1)$ premières inconnues, au sein des $(n-1)$ premières équations, on obtient $(n-1)$ nouvelles équations :

$$\begin{cases} Q_1(x, u) = 0 \\ Q_2(y, u) = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

On suppose le théorème de Bézout déjà démontré par récurrence pour les systèmes de $(n-1)$ équations : le degré en x,y,... des polynômes Q_1,Q_2,... est donc $p = k_1k_2...k_{n-1}$. On a donc p racines $x_1, ..., x_p$ de $Q_1(x, u)$, qui sont, selon l'expression de Poisson, des « fonctions irrationnelles de u », et à chacune d'elles correspond une solution du système initial. On a de même p racines y_1,...,y_p de $Q_2(y, u)$, et ainsi de suite. On peut supposer que ces racines sont rangées dans le bon ordre, c'est-à-dire que pour tout i, $(x_i, y_i, ...)$ est une solution du système initial. Alors l'équation finale en u est :

$$\prod_{i=1}^{p} P_n(x_i, y_i, ..., u) = 0$$

On détermine son degré au moyen de considérations sur les fonctions des racines x_i,y_i,... invariantes par permutation des indices i (généralisation de la notion de fonction symétrique des racines au cas de plusieurs ensembles de racines), et on vérifie qu'il est égal à $pk_n = k_1k_2...k_n$. Poisson ajoute cependant :

> La longueur des calculs qu'entraîne cette méthode, la rendra presque toujours impraticable, et nous ne l'avons indiquée ici que parce qu'elle donne la solution la plus directe du problème de l'élimination. Ainsi, dans la pratique, pour obtenir l'équation finale à son véritable degré, il faudra recourir aux méthodes que l'on trouve exposées avec beaucoup de détails dans la *Théorie des équations* de Bézout.[30]

Ces deux voies ont donc produit deux démonstrations distinctes du théorème de Bézout. Mais l'objet dont il est question dans ce théorème, l'équation finale résultant de l'élimination, est défini tantôt comme une équation de degré minimal de la forme $P_1R_1 + ... + P_nR_n = 0$, tantôt comme une équation telle qu'à chacune de ses racines corresponde une solution du système d'équations proposé. Bézout et Poisson n'ont donc pas, à proprement parler, montré le même théorème. Ainsi, la démonstration de Bézout ne garantit pas qu'à chaque racine

[30]cf. [31], p. 203.

de l'équation finale corresponde au moins une solution commune aux équations proposées. Lagrange, peut-être le premier lecteur du traité de Bézout, écrivit à celui-ci le 12 juillet 1779, pour le féliciter de son ouvrage, et en particulier de la première partie, « chef d'oeuvre d'analyse ». Il lui fit part cependant de l'objection mentionnée ci-dessus, et fit l'ébauche d'une démonstration prouvant – de manière effective – qu'à chaque racine de l'équation finale – au sens de Bézout – correspond bien une solution du système d'équations proposé.

Il nous faut remettre à une autre occasion le récit de la reprise des méthodes de Bézout, Lagrange et Poisson par les auteurs du XIX^e siècle. Remarquons simplement que, à ce stade, malgré l'ampleur du travail déjà accompli par ces trois personnages, les problèmes conceptuels suscités dès les premières applications du théorème de Bézout par MacLaurin sont toujours présents, et surtout celui de la multiplicité d'intersection. Ce concept gardera son importance au XX^e siècle en géométrie algébrique, malgré le déclin relatif de la théorie de l'élimination[31]. D'autre part, les méthodes utilisées par Bézout posent un problème de rigueur : Bézout fait des raisonnements qui ne peuvent pas être formalisés dans le langage de l'algèbre d'alors (par exemple le décompte des « coefficients inutiles »). Enfin, avec le développement de la géométrie projective, une question va trouver à la fois une formulation plus exacte, et des réponses : comment compter, dans la solution d'un système d'équations, les « points à l'infini ». Puis, avec le développement des nombres complexes, sera précisée la réponse au problème des « points imaginaires » déjà abordé par Euler.

La théorie de l'élimination, aux XVII^e et XVIII^e siècles, s'est heurtée, conjointement, à des difficultés techniques et à des problèmes conceptuels. On aurait pu croire, à ses débuts (avec Faulhaber ou Leibniz), que la difficulté était purement technique (au mieux, *combinatoire*). La complexité des calculs d'élimination a pu ralentir l'histoire, et le problème n'était, en tout cas, pas à la portée de tous, ni même les résultats déjà atteints, comme le montrera encore au XIX^e siècle le jugement trop pessimiste d'Auguste Comte :

> Quelque pénibles que soient les méthodes à l'aide desquelles on surmonte cette difficulté, elles ne sont pas même applicables d'une manière entièrement générale, à l'élimination d'une inconnue entre deux équations de forme quelconque.[32]

Pourtant la difficulté technique n'a pu finalement ni masquer les problèmes conceptuels, ni empêcher le développement de la théorie, comme le montrent les thèmes nouveaux ou renouvelés mentionnés ci-dessus, entre algèbre et géométrie :

– classification des problèmes suivant leur nombre d'équations, d'inconnues et de solutions,
– divisibilité des polynômes (notion de plus grand commun diviseur),
– points imaginaires (d'abord dans le plan),

[31]Quant à ce déclin, Van der Waerden a pu écrire, dans un article historique : « Obviously Weil and Chevalley do not like Elimination Theory », cf. [37].

[32]cf. *Cours de philosophie positive*, tome premier (Rouen Frères, Paris, 1830), cinquième leçon, p. 208.

– classification des courbes et de leurs singularités,
– notion d'« équation-somme » de Bézout.
La difficulté technique a peut-être même, à certains moments fait sentir d'autant plus l'urgence d'un nouvel éclairage conceptuel : pensons aux réflexions de Leibniz sur la nécessité de chercher une formule plutôt qu'un algorithme d'élimination, à celles de Cramer sur le « paradoxe », ou à celles de Bézout sur le problème des facteurs superflus. N'est-ce pas à cause de la complexité et des « difficultés » des méthodes exposées par Bézout en 1779 que Poisson, comme il le dit lui-même, propose une autre méthode, « la solution la plus directe du problème de l'élimination », en 1802 ?

Origine de la théorie de l'élimination

Pour donner une réponse, au moins provisoire, à la question de l'origine historique de la théorie de l'élimination, il nous faut de nouveau porter notre attention sur trois premières occurences indépendantes (à notre connaissance) d'une méthode générale d'élimination dans les travaux des mathématiciens du XVII$^{\mathrm{e}}$ siècle.

Faulhaber, en 1622, dans ses *Miracula arithmetica*, propose une telle méthode, certes encore imparfaite et ne méritant pas le nom d'algorithme, afin de résoudre le système d'équations issu de l'application de la méthode des coefficients indéterminés à la résolution algébrique d'une équation de degré supérieur à quatre.

Fermat, vers 1650, propose à Carcavi une méthode d'élimination dont le but est double : d'une part l'élimination des « asymétries », c'est-à-dire la tranformation d'une équation contenant des radicaux en une équation polynomiale, et d'autre part, la réduction de tous les problèmes à des problèmes plans. Le second objectif était illusoire[33], mais l'on comprendra le vain espoir caressé par Fermat si l'on pense qu'il put être inspiré par l'analyse diophantienne rationnelle. La « méthode de la double équation » en analyse diophantienne dut lui servir de modèle. Soit en effet la double équation[34] :

$$\left\{ \begin{array}{l} r^2x^2 + bx + 1 = y^2 \\ s^2x^2 + ex + 1 = z^2 \end{array} \right.$$

Comme l'on a deux équations seulement, et trois inconnues, on peut imposer une condition supplémentaire. La « méthode de la double équation » utilisée par Fermat consiste à poser $y - z = \lambda x$. On parvient alors à trouver une nouvelle équation $y^2 = Ax^2 + Bx + C$, en combinant les trois précédentes. Le choix du paramètre λ permet de garantir que $A = r^2$, auquel cas, en comparant les deux valeurs obtenues pour y^2 :

$$r^2x^2 + bx + 1 = Ax^2 + Bx + C$$

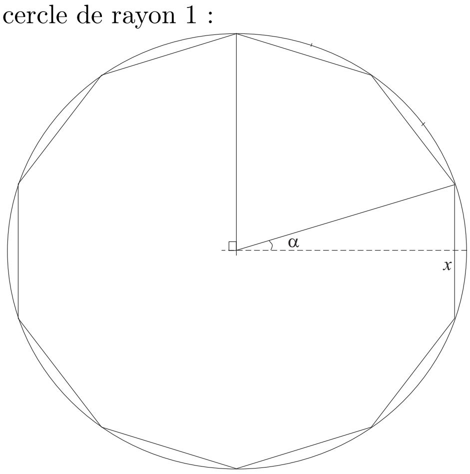
[33] L'erreur de Fermat fut commentée par Itard [19], p. 220.
[34] Pour un exposé plus détaillé de la méthode de la double équation chez Fermat, cf. [14], p. 21–22.

puis en simplifiant, on obtient :

$$bx + 1 = Bx + C$$

D'où une solution rationnelle. Résumons : cette méthode consiste, d'abord à imposer une condition supplémentaire au système pour le rendre « déterminé », puis à éliminer y et z pour obtenir une équation finale en x. Le choix arbitraire de la condition supplémentaire permet de plus de garantir l'élimination de la plus haute puissance de x (terme en x^2). Quant à la méthode générale d'élimination proposée par Fermat, dans le cas de l'élimination d'une inconnue x de deux équations, elle consiste à former une suite d'équations de degrés décroissants en x, en éliminant, à chaque étape, le terme constant de la dernière équation au moyen de l'équation précédente, jusqu'à l'obtention d'une équation linéaire en x, d'où une expression rationnelle de la valeur de l'inconnue x, qui, substituée à x dans une des équations précédentes, donne alors une équation finale libérée de l'inconnue x. Rien n'indique que Fermat ait eu connaissance des travaux de Faulhaber ; sa description comme l'application de sa méthode sont bien différentes.

Enfin, si la *Prima epistola de reductione aequationum* de Hudde (1657) semble émerger du cercle d'idées de Faulhaber et Descartes, sur l'application en algèbre de la méthode des coefficients indéterminés, Frans van Schooten publie aussi, en la même année, une application fort différente de la méthode d'élimination de Hudde dans ses *Exercitationum mathematicarum libri quinque*[35] : la construction des polygones réguliers. Schooten n'attribue pas seulement à Hudde la méthode d'élimination, mais laisse aussi entendre que Hudde a travaillé sur les polygones réguliers. Il nous est donc impossible de dire quelle fut l'inspiration originale de Hudde. Soit un décagone de côté x, inscrit dans un cercle de rayon 1 :



Soit $\alpha = \frac{\pi}{10}$. La corde de l'angle 2α est $x = 2\sin\alpha$. Les relations $4\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha$ et

[35]cf. [35], section XXI, p. 464–475.

$6\alpha = \frac{\pi}{2} + \alpha$, traduites en termes de sinus, donnent alors les deux équations :

$$\begin{cases} x^4 - 4x^2 - x + 2 = 0 \\ x^6 - 6x^4 + 9x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$$

La méthode de Hudde consiste à former une suite d'équations de degrés décroissants, en éliminant successivement les plus hautes puissances de l'inconnue x, jusqu'à obtenir une équation de degré minimal, ici $x^2 + x - 1 = 0$, dont l'une des racines est la longueur du côté du décagone convexe. Rien ne semble indiquer que Hudde ait connu la méthode de Fermat. En fait, la méthode de Hudde coïncide avec celle de Fermat *via* le changement de variable $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Le contraste entre ces trois événements, entre résolution algébrique des équations, analyse diophantienne rationnelle, et construction des polygones réguliers, montre que la conception d'une méthode d'élimination ne peut s'expliquer par un rapport particulier de l'algèbre à une autre discipline. D'ailleurs, les algébristes arabes s'étaient déjà penchés sur l'analyse diophantienne rationnelle dès le IX^{e} siècle (Abū Kāmil), ainsi que sur la construction des polygones réguliers, et la méthode de résolution algébrique de l'équation de degré 4 de Faulhaber n'est qu'une variante de celle offerte par l'algébriste italien Ferrari dans la première moitié du XVI^{e} siècle. Bien que toute application de l'algèbre à un domaine renforce souvent celle-ci en retour, en lui prêtant le substrat intuitif qui lui manque, la théorie de l'élimination est proprement algébrique, dans le sens où elle se rapporte directement aux concepts de l'inconnue et de ses puissances, que l'on « élimine ». Pourtant, il ne faudra pas négliger un tel principe d'explication, pour rendre compte, par exemple, de l'histoire du « théorème de Bézout » : nous avons vu qu'il naît d'un rapport particulier de l'algèbre à la théorie des courbes, probablement au sein de la critique du système cartésien de classification des courbes par « genre ».

Serait-ce donc un obstacle technique, qui aurait retardé l'élaboration d'un algorithme d'élimination, jusqu'à ce que des mathématiciens aussi adroits qu'un Fermat l'ait surmonté ? Non plus. En fait, l'algorithme d'élimination de Hudde coïncide précisément avec l'algorithme pour la recherche du plus grand commun dénominateur de deux polynômes, déjà employé par Stévin en 1585, pour simplifier des équations de la forme $P(x) = Q(x)$, en divisant chaque membre par le plus grand commun dénominateur de P et Q. D'ailleurs, il ne diffère pas essentiellement de l'algorithme euclidien de la recherche du plus grand commun dénominateur de deux entiers. Pourtant, nous l'avons vu dans la première partie de notre étude, il ne faut pas négliger un tel principe d'explication pour le développement ultérieur de la théorie de l'élimination : tant que la matière résiste, la recherche se poursuit.

Alors, pourquoi des méthodes d'élimination apparaissent-elles au XVII^{e} siècle ? L'expliquerait-on par l'avénement d'une nouvelle algèbre, assise sur le concept de système d'équations à plusieurs inconnues, voire même d'une algèbre symbolique, qui ne se refuse plus à écrire données, inconnues, et coefficients indéterminés ou inconnues auxiliaires, au moyen de lettres et d'exposants ? Attention, l'explication risque d'être circulaire : comment caractériser une algèbre assise sur des concepts et symboles nouveaux, sinon par les méthodes dont rendent compte les symboles, et par la classification au sein de laquelle s'organisent les concepts ? D'ailleurs les algébristes arabes utilisaient parfois, dès le IX^e siècle, plusieurs inconnues qu'ils désignaient par des noms différents, et, au XVI^e siècle, l'allemand Stifel notait les inconnues au moyen des lettres de l'alphabet, en 1544. Stévin et Albert Girard parlaient de « postposées quantités » pour désigner plusieurs inconnues et leurs puissances. A partir du IX^e siècle, de nombreux traités d'algèbre contiennent un chapitre d'analyse diophantienne, et donc, en particulier, des systèmes d'équations. Enfin, Cardan utilisait un coefficient indéterminé pour décrire la méthode de résolution de l'équation de degré 4 due à Ferrari. Il faut donc rejeter encore une telle explication, à moins de préciser le sens d'une « nouvelle algèbre ».

Les trois problèmes que nous avons décrits ci-dessus sont des problèmes déjà anciens. Ce qui est nouveau, c'est seulement l'ordre adopté dans la résolution des problèmes. Ainsi pour la construction du décagone, tout d'abord la mise en équations du problème, puis l'élimination, qui conduit à une équation à une inconnue résoluble par les algorithmes classiques. Fermat entend modeler la résolution de tout problème sur l'ordre adopté en analyse diophantienne rationnelle : tout d'abord, la recherche d'équations supplémentaires pour rendre le problème déterminé (voire même « surabondant », nous dit Fermat), puis l'élimination, qui conduit à une unique équation. La distinction d'étapes dans l'analyse, qui n'étaient pas conçues séparément par les anciens algébristes, s'illustre particulièrement dans la *Géométrie* de Descartes (livre I). Une première étape consiste en la mise en équations du problème. « Après cela, écrit Descartes, il se faut servir par ordre de chacune des équations qui restent, soit en la considérant toute seule, soit en la comparant avec les autres, pour expliquer chacune de ces lignes inconnues, et faire ainsi, en les démêlant, qu'il n'en demeure qu'une seule ». Puis vient la résolution de l'équation finale par les méthodes classiques. Descartes n'avait toutefois aucune méthode générale d'élimination pour effectuer cette mutuelle « comparaison » des équations. Les deux premières étapes de l'analyse – mise en équations, élimination – sont confondues dans l'algèbre classique (y compris chez Viète). Pendant longtemps encore (y compris chez Descartes, la *Géométrie*, livre III) le noyau d'un traité d'algèbre consistera en des algorithmes de résolution (algébriques, géométriques, arithmétiques, numériques) des équations à une inconnue, et leur démonstration. Mais la conception distincte d'un système d'équations issu d'une première étape de l'analyse, est le préalable de la mise en algorithme de cette deuxième étape qu'est l'élimination.[36] La lente évolution de

[36]De plus de nouvelles méthodes algébriques, comme la méthode des coefficients indéterminés utilisée par Faulhaber, ainsi que la *syncrisis* de Viète, en introduisant des inconnues auxiliaires, causent un détour dans l'ordre de l'analyse (voir [30]). Autant d'occasions nouvelles d'avoir recours à des techniques d'élimination. La *syncrisis* est la comparaison mutuelle d'équations ayant mêmes coefficients, mais une inconnue différente, et est utilisée par Viète dans le *De recognitione aequationum* : « Syncrisis est duarum aequationum correlatarum mutua inter se ad deprehendum earum constitutionem collatio ;... aequationum constitutio, syncrisi cognoscetur probe » ([38], p. 104). C'est certainement cette méthode qui l'a conduit à l'expression des coefficients comme fonctions symétriques élémentaires des racines d'une équation. D'ailleurs, Fermat connaissait bien la *syncrisis* de Viète.

l'algèbre ne montrera l'achèvement de cette prise de conscience qu'à la fin du XVIII^{e} siècle, quand l'élimination acquiert le statut de « théorie ». Au moins un auteur, Bézout, dans sa *Théorie générale des équations algébriques*, choisira alors de consacrer à l'élimination un traité général d'algèbre, à l'exclusion de toute méthode de résolution des équations à une inconnue.

Références

[1] Jacques BERNOULLI. « « Animadversio in geometriam cartesianam, et constructio quorundam problematum hypersolidorum » ». *Acta Eruditorum*, pages 323–330, juin 1688.

[2] Etienne BÉZOUT. « « Sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues » ». *Hist. Acad. Sci.*, pages 288–338, 1764.

[3] Etienne BÉZOUT. *Théorie générale des équations algébriques.* Ph.-D. Pierres, Paris, 1779.

[4] W. BRAIKENRIDGE. *« Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum ».* Ric. Hett & Joh. Nourse, Londres, 1733.

[5] Gabriel CRAMER. *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques.* Frères Cramer et Cl. Philibert, Genève, 1750.

[6] René DESCARTES. *Geometria Renati Cartesii*, éd. Frans van Schooten. Elzevir, Amsterdam, 1659–1661.

[7] René DESCARTES. *Oeuvres de Descartes publiées par Charles Adam et Paul Tannery.* Vrin, Paris, 1986.

[8] Leonhard EULER. « « Démonstration sur le nombre des points où deux lignes des ordres quelconques peuvent se rencontrer » ». *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*, *4* : 234–248, 1748. (cf. [11], série 1, vol. XXVI, p. 46–59).

[9] Leonhard EULER. *Introductio in analysin infinitorum.* Bousquet, Lausanne, 1748. (trad. franç. J. B. LABEY, *Introduction à l'analyse infinitésimale*, Barrois, Paris, 1797).

[10] Leonhard EULER. « « Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des équations » ». *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*, *20* : 91–104, 1764. (cf. [11], serie 1, vol. VI, p. 197–211).

[11] Leonhard EULER. *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, éd., F. Rudio, A. Krazer, P. Stackel. Série 1, 29 vol. ; série 2, 31 vol. ; série 3, 12 vol. ; série 4A, correspondance, 7 vol. B. G. Teubner, Leipzig Berlin Zurich Basel, 1911.

[12] Johannes FAULHABER. *Miracula Arithmetica. Zu der Continuation seiner Arithmetischen Wegweisers gehörig.* David Franck, Augsburg, 1622.

[13] Pierre FERMAT. *Oeuvres de Fermat*, éd. P. Tannery et Ch. Henry. Gauthier-Villars, Paris, 1891.

[14] Pierre FERMAT. *Oeuvres de Pierre de Fermat. I. La théorie des nombres.* éd. R. Rashed, C. Houzel, G. Christol. Albert Blanchard, Paris, 1999.

[15] Albert Girard. *Invention nouvelle en l'algèbre.* Guillaume Ianssen Blaeuw, Amsterdam, 1629.

[16] Jeremy J. Gray. « « Algebra in der Geometrie von Newton bis Plücker » ». *Math. Semesterber.*, *36* : 175–204, 1989.

[17] Christian Houzel. *La géométrie algébrique. Recherches historiques.* Albert Blanchard, Paris, 2002.

[18] Johann Hudde. « « Epistola prima de reductione aequationum » ». *in* [6], p. 401–506.

[19] Jean Itard. *Essais d'histoire des mathématiques.* Albert Blanchard, Paris, 1984.

[20] Jean-Pierre Jouanolou. *Le formalisme du résultant.* Université Louis Pasteur, Département de Mathématiques, Strasbourg, 1991. (aussi paru dans *Adv. in Math.*, *90*(2) : 117–263, 1991).

[21] Eberhard Knobloch. « « Unbekannte Studien von Leibniz zur Eliminations- und Explicationstheorie » ». *Archive for history of exact sciences*, *12* : 142–173, 1974.

[22] Eberhard Knobloch. « « Déterminants et élimination chez Leibniz » ». *Revue d'histoire des sciences*, *54*(2) : 143–164, 2001.

[23] Joseph Lagrange. « « Réflexions sur la résolution algébrique des équations » ». *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, pages 134–215 (1770), 138–253 (1771), 1770–1771. (cf. Oeuvres, t. III, p. 205–421).

[24] Gottfried Wilhelm Leibniz. « « De resolutionibus aequationum cubicarum triradicalium. De radicibus realibus, quae interventu imaginariarum exprimuntur. Deque sexta quadam operatione arithmetica (Oktober 1675) » ». *in* Sämtliche Schriften und Briefe, Berlin : Akademie verl., 7. Reihe, 2. Band, p. 678–700.

[25] Gottfried Wilhelm Leibniz. *Der Beginn der Determinantentheorie, Leibnizens nachgelassene Studien zum Determinantenkalkül*, éd. Eberhard Knobloch. Gerstenberg, Hildesheim, 1980.

[26] Colin MacLaurin. *Geometria organica : sive descriptio linearum curvarum universalis.* Gul. et Joh. Innys, London, 1720.

[27] Eugen Netto. « « Rationale Funktionen mehrerer Veranderlichen » ». *Enzykl. der Math. Wiss.*, *vol. I B 1 b* : 255–282, 1894.

[28] Isaac Newton. *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, éd., D. T. Whiteside. Cambridge University Press, Cambridge, 1972.

[29] Erwan Penchèvre. « « L'oeuvre algébrique de Johannes Faulhaber » ». à paraître *in* Oriens Occidens, Revue du Centre d'Histoire des Sciences et des Philosophies Arabes et Médiévales.

[30] Erwan Penchèvre. « « Théorie de l'élimination et méthode des coefficients indéterminés au XVII^{e} siècle » ». à paraître *in* Oriens Occidens, Revue du Centre d'Histoire des Sciences et des Philosophies Arabes et Médiévales.

[31] Siméon-Denis POISSON. « « Mémoire sur l'élimination dans les équations algébriques » ». *Journal de l'école polytechnique*, *4*(11) : 199, juin 1802.

[32] Jean-Victor PONCELET. *Traité des propriétés projectives des figures*, 2e éd. Gauthier-Villars, Paris, 1865.

[33] Roshdi RASHED. *Entre arithmétique et algèbre*. Les Belles Lettres, Paris, 1984.

[34] Roshdi RASHED. « « Fermat and Algebraic Geometry » ». *Historia Scientiarum*, *11*(1) : 24–47, 2001.

[35] Frans Van SCHOOTEN. *Exercitationum Mathematicarum liber V*. Elzevir, Leyden, 1657.

[36] Simon STÉVIN. *L'Arithmétique de Simon Stévin de Bruges*. Christophle Plantin, Leyde, 1585.

[37] B. L. VAN DER WAERDEN. « « The foundation of algebraic geometry from Severi to André Weil » ». *Archive for History of Exact Sciences*, *7* : 171–180, 1970/1971.

[38] François VIÈTE. *Francisci Vietae Opera*, éd. Franz Van Schooten. Elzevir, Leyden, 1646.

[39] Edward WARING. *Meditationes algebraicae : an English translation of the work of Edward Waring*, trad. Dennis WEEKS. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1991.