Exercice 3
Un réseau social compte 2019 membres. Certains de ces membres sont amis l'un avec l'autre, la relation d'amitié étant réciproque. Des événements du type décrit ci-dessous surviennent successivement, l'un après l'autre :

> Soit A, B et C trois membres tels que A soit ami avec B et C, mais que B et C ne soient pas amis ; alors B et C deviennent amis, mais A n'est plus ami ni avec B, ni avec C. Les autres relations d'amitié entre membres ne changent pas durant cet événement.

Initialement, 1010 membres ont 1009 amis chacun, et 1009 membres ont 1010 amis chacun. Démontrer qu'il existe une suite de tels événements à la suite desquels chaque membre aura au plus un ami.

Solution 3
Dans la suite, on assimilera l'ensemble des membres du réseau social aux sommets d'un graphe, et les relations d'amitié aux arêtes du graphe. Une première chose à faire est de s'intéresser aux invariants que conservent les événements mentionnés ci-dessus. Ici, le nombre de relations d'amitié diminue de 1, et les degrés des sommets A, B et C varient de -2, 0 et 0 : leur parité reste donc inchangée. D'autre part, ces événements ne peuvent pas conduire à la fusion de deux composantes connexes, ni de créer de cycle dans une composante acyclique.

On dira donc qu'une composante connexe est *bonne* s'il existe une suite d'événements qui la transforme en un graphe de degré maximal 1, et qu'elle est *mauvaise* sinon, et on s'intéresse aux bonnes composantes connexes. On voit alors clairement qu'une clique de taille $k \geqslant 3$ est mauvaise, puis qu'un cycle de taille $k \geqslant 3$ est lui aussi mauvais, car on finit nécessairement par le réduire en un triangle.

Puis, plus généralement, si une composante connexe ne contient que des sommets de degré pair (et non nul), la composante de B et de C restera une composante ne contenant que des sommets de degré pair (et non nul) : on ne pourra donc pas réduire notre composante initiale en sommets de degré au plus un. Ainsi, on dit qu'une composante connexe est *acceptable* si ce n'est pas une clique de taille $k \geqslant 3$ et si elle contient au moins un sommet de degré impair (ou s'il s'agit en fait d'un sommet isolé) ; nous venons de démontrer que toute bonne composante connexe est acceptable.

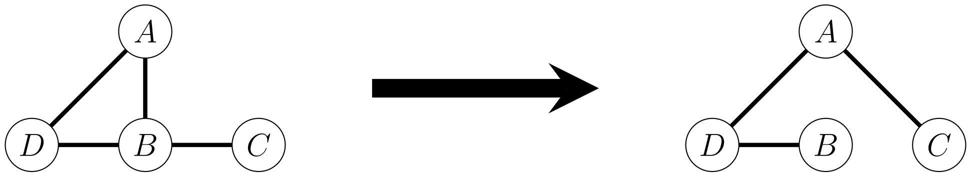
Ne voyant pas quelles contraintes supplémentaires exiger de la part de nos composantes connexes, faisons pour l'instant le pari que toute composante acceptable est bonne. Si on trouve un contre-exemple, on pourra toujours raffiner notre notion de composante acceptable.

Tout d'abord, initialement, chaque composante connexe contient au moins 1010 sommets. Puisqu'on a 2019 sommets en tout, le graphe est connexe. Et il contient des sommets de degré impair, donc ce n'est même pas une clique. Notre graphe est donc formé d'une unique composante connexe acceptable.

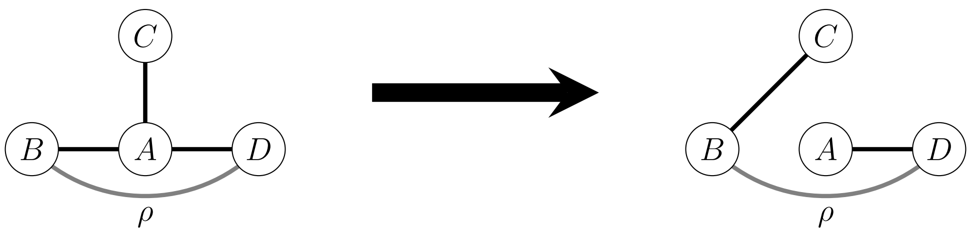
Soit maintenant $\mathcal{C}$ une composante acceptable comportant au moins un sommet de degré 2 ou plus, et montrons qu'on peut la transformer en une nouvelle composante elle aussi acceptable (voire deux composantes acceptables). Pour ce faire, il suffit de ne pas casser la connexité de cette composante, sauf quand on est sûr que cela ne causera pas de catastrophe.

Tout d'abord, si $\mathcal{C}$ ne contient pas de cycle, c'est donc un arbre, et nul événement ne peut y créer de cycle. S'il existe un sommet A de degré 2 ou plus, en choisissant deux voisins B et C de A, On peut ainsi appliquer un événement au triplet (A, B, C), et scindera $\mathcal{C}$ en un ou deux arbres, chacun étant acceptable.

D'autre part, si $\mathcal{C}$ contient un triangle T, soit K une clique maximale contenant T. Puisque $\mathcal{C}$ n'est pas une clique, elle c'est qu'il existe un sommet B voisin de K mais pas de tous les sommets de K. On considère alors deux sommets A et C de K tels que B soit voisin de A mais pas de C. Puisque K contient un triangle, A et B ont un voisin commun, que l'on note D. Puis, en appliquant un événement au triplet (A, B, C), on transforme $\mathcal{C}$ en une nouvelle composante connexe $\mathcal{C}'$ qui contient les mêmes sommets qu'avant.



Supposons maintenant que $\mathcal{C}$ contient un cycle mais pas de triangle. Soit A un sommet de degré maximal appartenant à un cycle, et soit B et D deux voisins de A apparenant à un tel cycle : on note ρ le chemin qui les relie sans passer par A. Puisque $\mathcal{C}$ lui-même n'est pas un cycle, c'est que $\deg A \geqslant 3$. Ainsi, soit C un autre voisin de A. Comme $\mathcal{C}$ est sans triangle, B et C ne sont pas voisins. On peut donc appliquer un événement au triplet (A, B, C). Ce faisant, les seules arêtes de $\mathcal{C}$ qui ont disparu sont AB et AC, mais on peut les remplacer par les chemins $AD\,\rho$ et $AD\,\rho\,BC$, de sorte que notre composante reste connexe.



En conclusion, toute composante connexe acceptable peut être réduite en une autre composante connexe acceptable, ou en une forêt (dont toutes les composantes sont acceptables) contenant une arête de moins, ce qui conclut.