Tomographie et transformée de Radon : des images de maths !

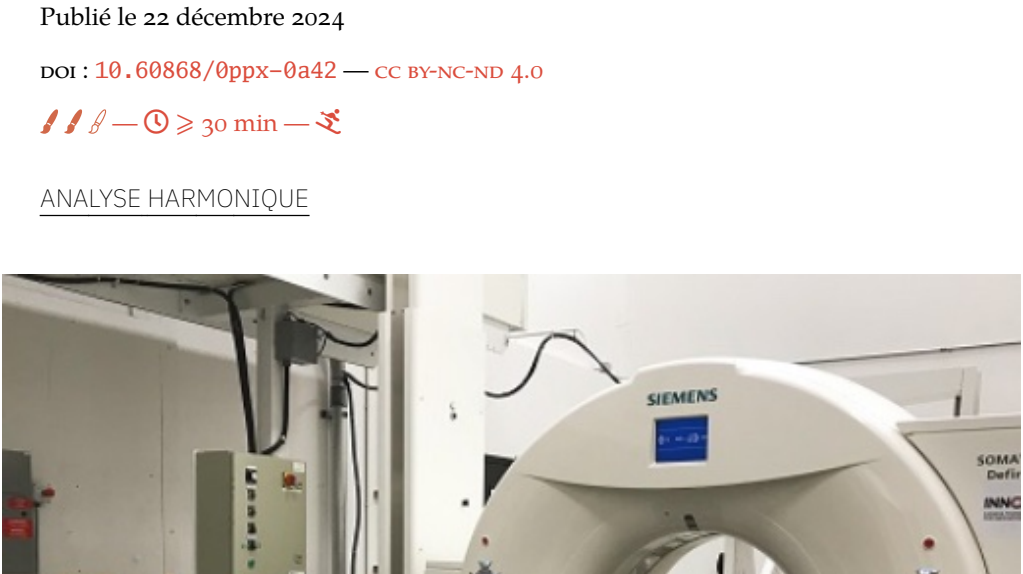
Écrit par **Romain Bondil**

Publié le 22 décembre 2024

DOI : 10.60868/0ppx-0a42 — CC BY-NC-ND 4.0

— ⩾ 30 min —

ANALYSE HARMONIQUE



Un *appareil de tomographie* est une sorte d'anneau dans lequel on place un objet ou une personne, qui sont alors traversés par un faisceau de rayons X « suivant toutes les directions » comme illustré sur l'image ci-dessus où l'on étudie la structure d'objets anciens.

Sommaire

L'image obtenue par les capteurs à partir de la forme originale
Comment retrouver la forme originale : l'idée de la rétroprojection
Comment faire mieux : avec l'analyse de Fourier
Références

Comme vous le savez si vous avez vous-même passé un scanner médical, la tomographie permet d'avoir une image de la structure interne de l'objet examiné, typiquement des différentes densités d'objets à l'intérieur, et cela sans l'ouvrir. Le grec *tomô* signifie pourtant *je coupe*, mais ici point de scalpel, seulement des rayons ! Le principe en a déjà été expliqué dans [4], mais ici nous allons présenter concrètement l'image récoltée par l'appareil.

Nous allons voir que cette image, loin d'être comparable à une simple photographie, ou à son négatif, est ce qu'on appelle la *transformée de Radon* de cet objet, une image purement mathématique, et qu'il faut ensuite encore pas mal de mathématiques pour en déduire l'image que nous attendons de notre objet. Dans cet article, on se limitera à des tranches planes de ces objets, autrement dit à un problème à deux dimensions, sans nous occuper de la reconstitution éventuelle des objets tridimensionnels avec différents plans de coupe.

L'image obtenue par les capteurs à partir de la forme originale

La fonction d'atténuation représentant l'objet étudié

La figure 1 représente un objet qui est un des héros dans le milieu des personnes qui étudient cette théorie, *le fantôme de Shepp-Logan*. On peut y penser comme un modèle-jouet d'une section de crâne où l'on veut détecter la présence de tumeurs. L'image reproduite ici est celle disponible avec le package `scikit-image` du langage de programmation Python ; on l'a mise dans un disque noir représentant l'appareil et on y a ajouté quelques rayons envoyés de gauche à droite entre les bords du dispositif.

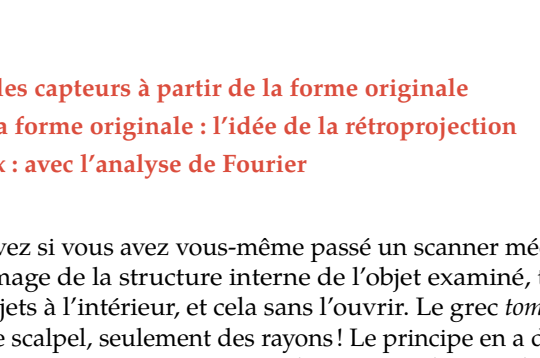


Figure 1 – Le fantôme de Shepp-Logan traversé par quelques rayons

La convention de couleurs est celle dont on a l'habitude quand on regarde des radiographies où les os sont en blanc : plus une zone est dense plus elle est lumineuse. Simplement les radios usuelles sont en noir et blanc alors qu'ici, on utilise plus de couleurs pour mieux voir les différentes densités. Ainsi la boite crânienne, en jaune, est la plus dense. Les deux cavités elliptiques sombres au centre du crâne sont moins denses.

L'objet initial, considéré comme plan, est donné par une *fonction d'atténuation* qui, à chaque point du plan de coordonnées (x, y), va associer un nombre $A(x, y)$ correspondant à la proportion des rayons qui sont absorbés par le matériau en ce point : en un point d'un os, A sera grand, et en un point de l'air, il sera faible.

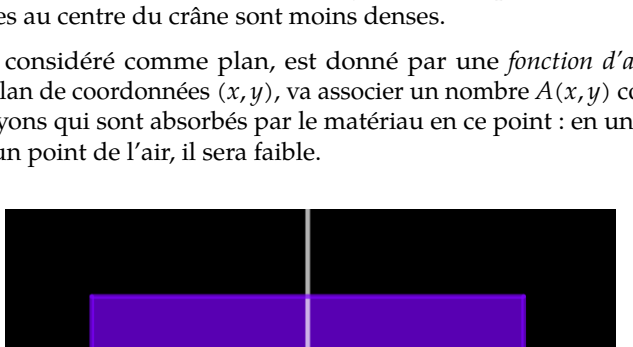


Figure 2 – Un carré jaune dans un carré mauve

Par exemple, l'objet simple de la figure 2 (avec les axes en blanc) a la fonction d'atténuation suivante

$$A(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \max(|x|,|y|) \leqslant 1 \\ 0,5 & \text{si } 1 < \max(|x|,|y|) < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Que mesure-t-on dans une tomographie ?

L'appareil de tomographie émet des rayons dans certaines directions, puis les recueille une fois qu'ils ont traversé l'objet à étudier. De façon quantitative, pour une certaine intensité lumineuse I_E émise d'un côté de l'appareil, on va mesurer l'intensité lumineuse I_R reçue de l'autre côté, et cela en chaque point du récepteur. On parle d'intensité lumineuse même si cette lumière n'est pas ici la lumière visible mais des rayons X.

Une loi physique

En supposant dans un premier temps que la fonction d'atténuation de notre objet est constante égale à a, pour tout rayon lumineux traversant notre objet, pour tout couple de points d'abscisses x et $x + \ell$ sur ce rayon, les abscisses étant croissantes dans le sens du rayon, le rapport d'intensités lumineuses $\frac{I(x+\ell)}{I(x)}$ *ne dépend que de a et de la longueur ℓ traversée et pas du point x.*

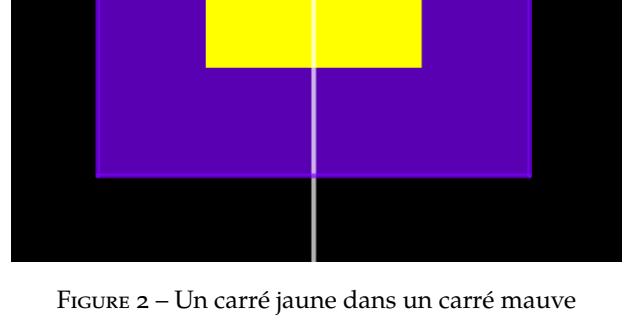


Figure 3 – Intensités lumineuses

En omettant provisoirement la dépendance par rapport à a et en notant alors $p(\ell)$ ce rapport $\frac{I(x+\ell)}{I(x)}$ qui correspond à la proportion de photons non absorbés sur une longueur ℓ, on voit que p vérifie la propriété

$$p(\ell_1 + \ell_2) = p(\ell_1) \cdot p(\ell_2)$$

Ceci traduit juste le fait simple suivant : les proportions de photons non absorbés *se multiplient* lors de traversées successives de milieux absorbants. Les personnes connaissant la fonction exponentielle conviendront alors que la bonne définition de l'atténuation est précisément $p(\ell) = e^{-a\ell}$, autrement dit que pour tout x et tout $x + \ell$ sur un axe[1]

$$I(x+\ell) = I(x)e^{-a\ell} \tag{1}$$

Pour se ramener à des grandeurs *additives*, on utilise plutôt le logarithme $i = \ln(I)$, qu'on appellera ici *mesure d'intensité lumineuse*[2]. L'équation (1) devient alors $i(x + \ell) = i(x) - a\ell$ et, en utilisant les notations sur les intensités émises et reçues ci-dessus, on obtient

$$i_R = i_E - aL \tag{2}$$

en notant L la longueur totale de la partie du rayon qui traverse notre objet où l'atténuation est constante égale à a.

Le cumul d'atténuation le long d'un rayon

En adaptant ce qui précède au cas où la fonction d'atténuation n'est plus constante, l'équation (2) doit être remplacée par

$$i_R = i_E - C_D(A) \tag{3}$$

où i_R et i_E sont les « mesures d'intensités lumineuses » et $C_D(A)$ est le *cumul* de l'atténuation le long du rayon porté par la droite D. Qu'est-ce que ce *cumul d'atténuation* ?

- Si l'on considère pour l'instant le cas de la figure 4, où le rayon est le segment rouge horizontal qui traverse un carré jaune qu'on suppose homogène, c'est-à-dire que l'atténuation est définie par la même valeur a en tout point du carré, et est nulle en dehors du carré, alors $C_D(A) = a \cdot c$, où c est la longueur de la portion du rayon qui est dans le carré.

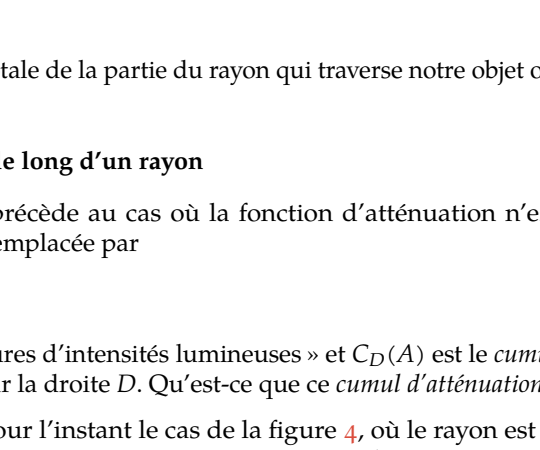


Figure 4 – Un seul rayon traversant un carré

- Dans le cas où le rayon traverserait plusieurs objets homogènes, par exemple les carrés concentriques de la section précédente, il faut ajouter les contributions de chacun de ces objets : par exemple pour ces deux carrés concentriques de la figure 2, le cumul de l'atténuation pour un rayon horizontal serait de 3, en comptant 1×2 pour la partie jaune mais $0,5 \times 1 + 0,5 \times 1$ pour les deux parties mauves.
- Dans le cas où la fonction d'atténuation varierait de manière continue à l'intérieur d'un objet, le calcul de cumul est ce qu'on appelle le calcul de l'intégrale de A le long du rayon, mais il n'est pas nécessaire d'en savoir plus ici.

On remarque que le cumul d'atténuation le long d'un rayon ne dépend pas du sens dans lequel le rayon est parcouru, mais juste de la droite qui en est le support. Pour mieux comprendre ce qu'on va maintenant recevoir sur *l'ensemble des détecteurs*, compte tenu de l'ensemble des rayons envoyés, il nous faut donc nous donner un moyen de considérer des familles de rayons lumineux, donc voir comment manipuler facilement des ensembles de droites du plan.

Intermède : une façon de décrire l'ensemble des droites du plan

Les coordonnées polaires d'un point du plan

Dans le plan $\mathbf{R}^2$, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on note $\overrightarrow{v_\theta} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ le vecteur unitaire d'angle polaire θ. Pour tout point $M \in \mathbf{R}^2$, un couple $(r, \theta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ tel que $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{v_\theta}$ s'appelle un *couple de coordonnées polaires* de M.

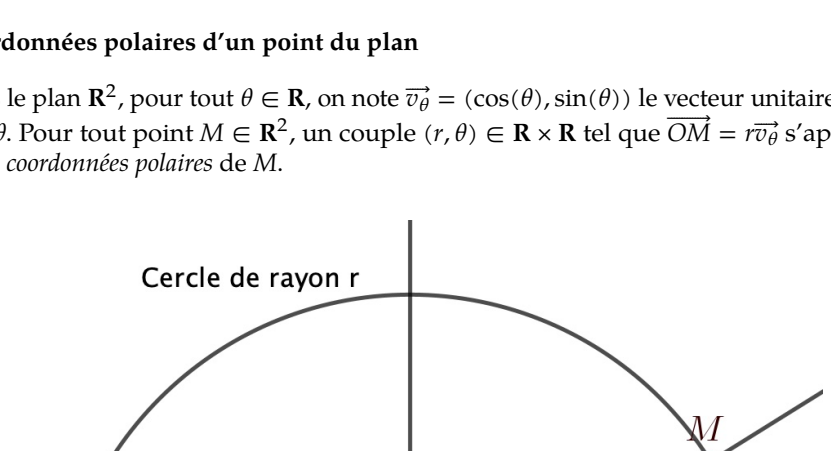

Cercle de rayon r
M
$\overrightarrow{v_\theta}$
$\theta + \pi$
θ
O
$\overrightarrow{v_{\theta+\pi}}$

Figure 5 – Les coordonnées polaires

Bien sûr $|r|$ est la distance OM entre les points O et M, mais ici, contrairement à l'habitude, on autorise r à être négatif ce qui sera bien utile dans les calculs ultérieurs. Si on remplace θ par $\theta + 2\pi$ on ne change pas le vecteur $\overrightarrow{v_\theta}$ donc (r, θ) et $(r, \theta + 2\pi)$ sont des coordonnées polaires du même point. Mais, mieux, en remarquant que $\overrightarrow{v_{\theta+\pi}} = -\overrightarrow{v_\theta}$, on a $r\overrightarrow{v_\theta} = -r\overrightarrow{v_{\theta+\pi}}$ et, comme on a autorisé r à être négatif, (r, θ) et $(-r, \theta + \pi)$ sont aussi des coordonnées polaires du même point. Enfin le cas où $M = O$ est très particulier puisqu'il admet tous les couples $(0, \theta)$ pour $\theta \in \mathbf{R}$ comme coordonnées polaires.

Application au repérage des droites du plan

Soit D une droite dans le plan $\mathbf{R}^2$ *qui ne passe pas par l'origine* O et M le projeté orthogonal de O sur D. On va repérer D par les coordonnées polaires (non uniques) (r, θ) de ce point M et on notera $D = D_{r,\theta}$ (figure 6).

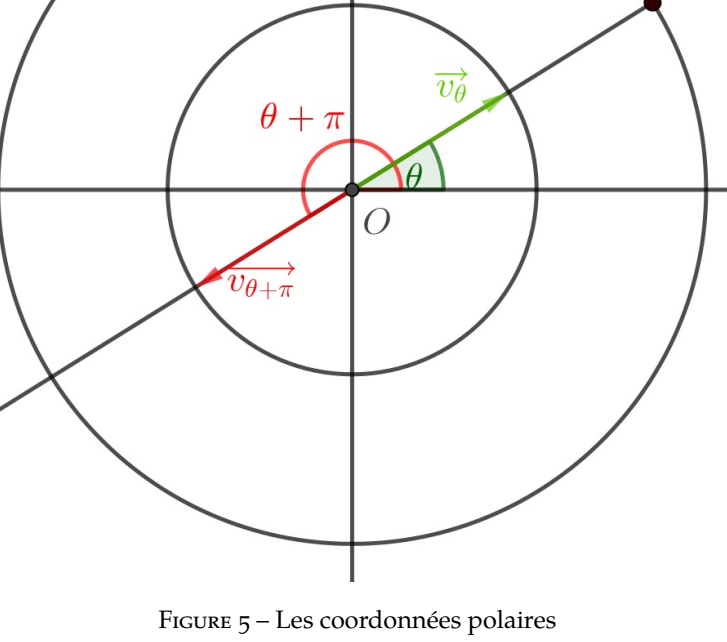


Figure 6 – Un couple de coordonnées polaires

Notons qu'on a encore $D_{r,\theta} = D_{-r,\theta+\pi}$. Le nombre θ est unique modulo π, il correspond à l'angle polaire de la droite (OM) qui est perpendiculaire à $D_{r,\theta}$. Si la droite D passe par l'origine, on la notera $D = D_{0,\theta}$ où $\theta \in \mathbf{R}$ est tel que $\overrightarrow{v_\theta}$ est orthogonal à D, ce qui définit encore θ modulo π. Inversement, pour chaque couple $(r, \theta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $D_{r,\theta}$ est la droite passant par le point $M = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ et perpendiculaire au vecteur $\vec{n} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. Une équation cartésienne de $D_{r,\theta}$ est alors donnée par la condition : $(x, y) \in D_{r,\theta}$ si et seulement si

$$x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = r \tag{4}$$

Cette façon de décrire toutes les droites du plan présente bien sûr les défauts de non-unicité que l'on précisé ci-dessus, mais ils ne nous gêneront pas pour la suite. Quelques exemples utiles pour la section suivante sont montrés sur la figure 7.

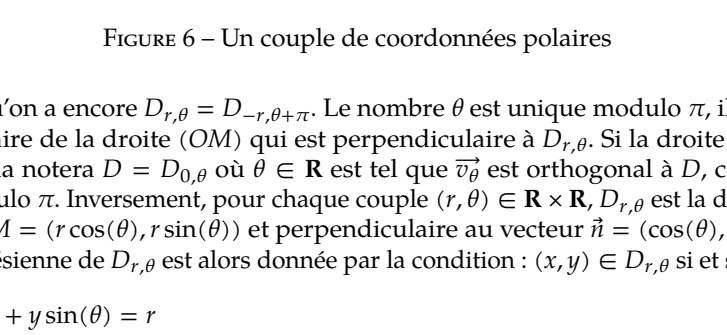


Figure 7 – Exemples utiles

Retour à l'image perçue par l'ensemble des détecteurs

Avec les notations des deux sections précédentes, si notre objet est donné par sa fonction d'atténuation $(x, y) \mapsto A(x, y)$ (qui est considérée comme nulle en dehors de l'objet) alors, d'après l'équation (3), le long du rayon $D_{r,\theta}$ l'intensité logarithmique reçue se déduit de l'intensité émise en retranchant le cumul de A le long de $D_{r,\theta}$, ce que l'on note $C_{D_{r,\theta}}(A)$.

D'un point de vue mathématique « idéal », et c'est le point de vue de Johan Radon au début du vingtième siècle, qui ne pense pas encore à la tomographie (!) mais s'intéresse à un problème purement mathématique, *la connaissance de tous ces cumuls pour chaque valeur de r et de θ doit donner une information complète sur la fonction A*. On appelle donc *transformée de Radon de A* la fonction $\mathcal{R}A$ définie pour tout $(r, \theta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ par

$$(\mathcal{R}A)(r,\theta) = C_{D_{r,\theta}}(A) \tag{5}$$

On notera par la suite $\mathcal{R}A(r, \theta)$ au lieu de $(\mathcal{R}A)(r, \theta)$. En pratique, avec un nombre fini de rayons, notre appareil de tomographie va donc disposer d'un nombre fini de valeurs $\mathcal{R}A\left(r_i, \theta_j\right)$ de cette transformée.

Illustrons ceci sur deux exemples. Si l'on reprend les deux images du carré homogène (figures 2 et 4) et la section de crâne (figure 1) avec leurs fonctions d'atténuation A, il est facile (ici avec le langage Python), de calculer les $\mathcal{R}A(r, \theta)$ pour différentes valeurs de (r, θ). Voici le résultat de ce calcul pour notre carré homogène (la barre des couleurs donne les correspondances entre valeurs des fonctions en un point et couleurs).

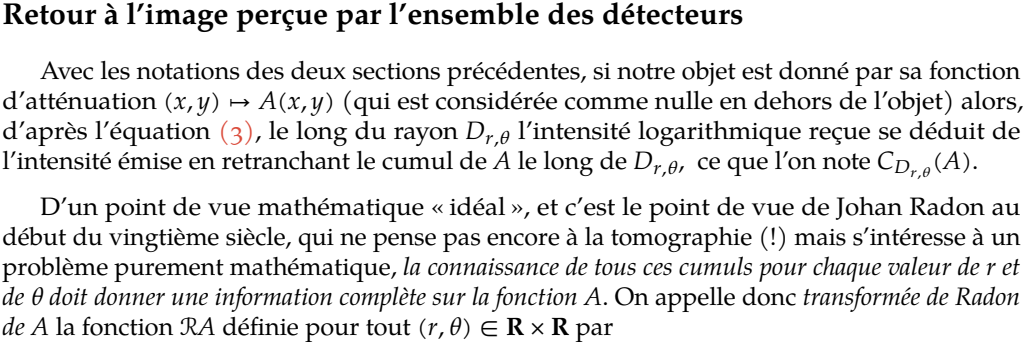


Figure 8 – Calcul pour le carré homogène

L'image de droite de la figure 8 est ce que « voit » notre détecteur. On comprend qu'il va falloir un certain travail pour savoir aller de droite à gauche et découvrir que cette image de droite est produite par un carré ! Bien sûr, quelques caractéristiques de l'image de droite se comprennent assez bien *sans calcul* à partir de l'image de gauche :

- d'une part, en regardant l'image du carré à gauche, on sait que la plus grande absorbance cumulée sera obtenue pour les droites coupant le carré jaune en ses diagonales, c'est-à-dire $r = 0$ et $\theta = \pi/4 \simeq 0,8$ et $\theta = 3\pi/4 \simeq 2,4$. Ce sont bien les deux points brillants qu'on observe dans l'image de droite ;
- d'autre part, toujours en regardant le carré de gauche, toutes les droites $D_{r,\theta}$ pour $\theta = 0$ ou $\theta = \pi/2$ observent la même absorbance pour $r \in [-1, 1]$ correspondant à la longueur du côté du carré, et celles pour r en-dehors de cet intervalle observent brutalement une absorbance nulle : c'est ce que l'on voit bien sur l'image de droite aux hauteurs $\theta = 0, \pi/2, \pi$.

Pour le fantôme de Shepp-Logan (figure 1), le même calcul conduit à l'image de droite de la figure 9.

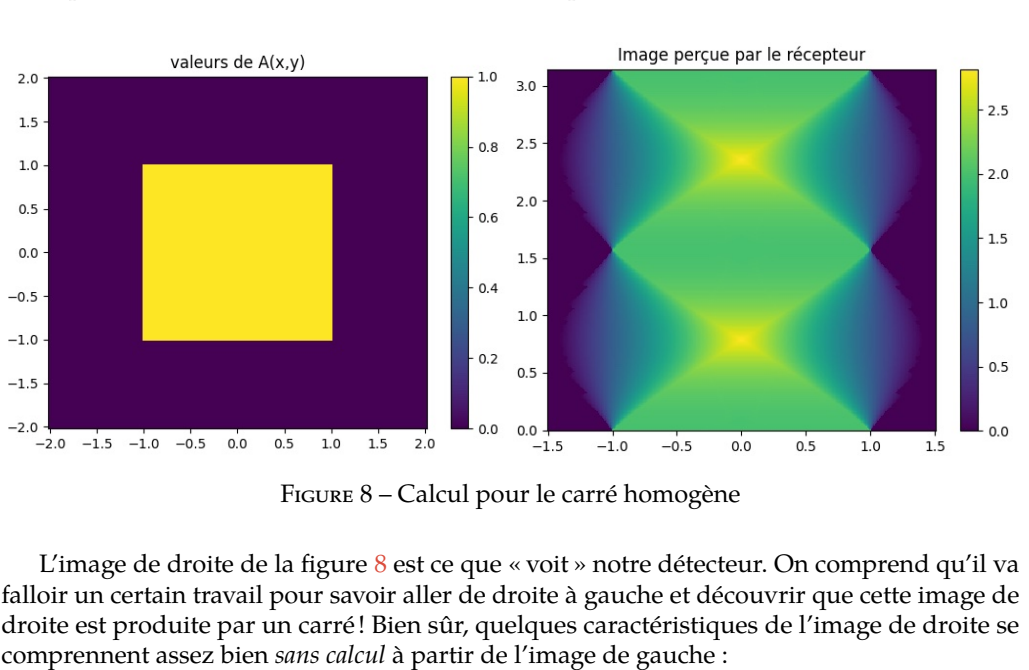


Figure 9 – Calcul pour le fantôme de Shepp-Logan

On peut ici encore faire quelques observations justifiant la forme de la figure de droite à partir de celle de gauche (figure 1) :

- ce sont les droites $D_{r,\theta}$ horizontales, c'est-à-dire pour $\theta = \pi/2 \simeq 1,5$, qui rencontrent le crâne pour le plus grand intervalle de valeurs de r ;
- la droite qui intersecte le crâne sur sa plus grande longueur est la droite verticale $D_{0,0} = D_{0,\pi}$ qui donne lieu au maximum d'intensité qui apparaît sur la figure de droite aux points $(0, 0)$ et $(0, \pi)$.

Comment retrouver la forme originale : l'idée de la rétroprojection

Comme expliqué précédemment, notre appareil de tomographie va donc nous fournir un certain nombre de valeurs $\mathcal{R}A\left(r_i, \theta_j\right)$, c'est-à-dire de la transformée de Radon de la fonction A que nous aimerions connaitre pour vraiment « voir » à l'intérieur de notre objet.

Définition de la rétroprojection

On va ici se placer dans le cadre théorique où l'on connaît toutes les valeurs $\mathcal{R}A(r, \theta)$ pour tout $r \in \mathbf{R}$ et $\theta \in \mathbf{R}$. Ensuite, il faudrait étudier des méthodes d'interpolation pour se rapprocher de cette situation si on connait « suffisamment » de valeurs de $\mathcal{R}A$.

On se place en un point (x_0, y_0) et on aimerait en connaître la valeur $A(x_0, y_0)$. Pour cela, on va considérer la famille de toutes les droites passant par ce point (x_0, y_0), c'est-à-dire, vu l'équation (4), l'ensemble des droites notées

$$D_{x_0\cos(\theta)+y_0\sin(\theta),\theta}$$

avec les notations définies dans ce paragraphe, et ce, *a priori*, pour $\theta \in [0, 2\pi]$. En fait, en notant ici $r_0(\theta) = x_0\cos(\theta) + y_0\sin(\theta)$, on remarque que $r_0(\theta + \pi) = -r_0(\theta)$, donc

$$D_{r_0(\theta+\pi),\theta+\pi} = D_{-r_0(\theta),\theta+\pi} = D_{r_0,\theta}$$

Ainsi on aura toutes les droites passant par (x_0, y_0) lorsque θ parcourt $[0, \pi]$.

Pour avoir une idée de la valeur $A(x_0, y_0)$, une possibilité, présentée dans [4], est de considérer *la valeur moyenne* des $\mathcal{R}A(r, \theta)$ sur l'ensemble des couples $(r, \theta) = (x_0\cos(\theta) + y_0\sin(\theta), \theta)$, pour $\theta \in [0, \pi]$, correspondant aux droites passant par ce point (x_0, y_0). Par *définition*, cette valeur moyenne s'appelle *rétro-projection de* $\mathcal{R}A$ en (x_0, y_0) et sera notée $\mathcal{B}(\mathcal{R}A)(x_0, y_0)$ (initiale $\mathcal{B}$ pour *back-projection* en anglais). Une *heuristique* pour cette idée est donnée dans la section Heuristique de la rétroprojection.

La figure 10 est une illustration avec 5 points et, pour chacun d'entre eux, une famille de 5 droites passant par le point et permettant de calculer une telle valeur moyenne de $\mathcal{R}A$ de manière approchée :

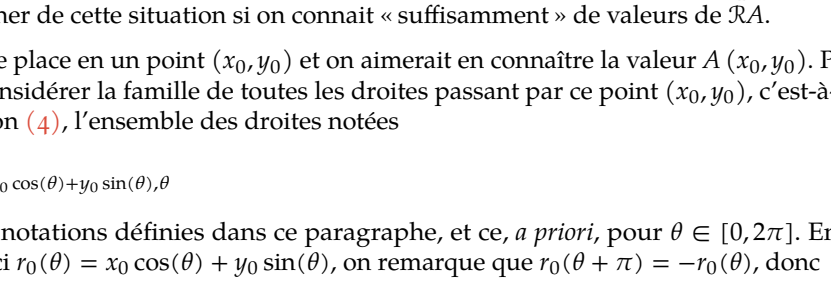


Figure 10 – Illustration avec 5 points

On évaluera ainsi $\mathcal{B}(\mathcal{R}A)(x_0, y_0)$ de manière approchée par

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathcal{R}A)(x_0,y_0) \quad \simeq \quad & \tfrac{1}{5}(\mathcal{R}A\left(x_0\cos(\theta_1) + y_0\sin(\theta_1), \theta_1\right) \\ & + \cdots + \mathcal{R}A\left(x_0\cos(\theta_5) + y_0\sin(\theta_5), \theta_5\right))\end{aligned}$$

avec ici $\theta_k = 2k\pi/5$. Si au lieu de 5 droites, on en prend N, toujours avec le même angle $2\pi/N$ entre elles, on a une nouvelle formule approchée :

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathcal{R}A)(x_0,y_0) \quad \simeq \quad & \tfrac{1}{N}(\mathcal{R}A\left(x_0\cos(\theta_1) + y_0\sin(\theta_1), \theta_1\right) \\ & + \cdots + \mathcal{R}A\left(x_0\cos(\theta_N) + y_0\sin(\theta_N), \theta_N\right))\end{aligned}$$

La valeur moyenne *idéale* s'obtient encore comme la valeur limite de ces sommes quand N tend vers l'infini : c'est la définition rigoureuse de

$$\mathcal{B}(\mathcal{R}A)(x_0,y_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathcal{R}A(x_0\cos(\theta) + y_0\sin(\theta), \theta)\,\mathrm{d}\theta$$

Heuristique de la rétroprojection

Je dois l'explication suivante à mon ami[3] Charles Boubel.

Pourquoi cette idée de moyenne ? La transformation $\mathcal{R}A$ est *linéaire*, ce qui signifie que si on somme deux fonctions d'atténuation A_1 et A_2 (c'est-à-dire qu'on « superpose » deux distributions d'atténuation, obtenant en tout point $A(x, y) = A_1(x, y) + A_2(x, y)$), alors la transformée de Radon obtenue est simplement la somme des transformées des fonctions A_1 et A_2, c'est-à-dire :

$$\mathcal{R}A = \mathcal{R}A_1 + \mathcal{R}A_2 \tag{6}$$

De manière semblable, la transformée inverse sera donc aussi à rechercher parmi les transformations linéaires. Cela simplifie la démarche de recherche, d'une façon bien connue dès qu'une propriété de linéarité est vérifiée. En effet, l'équation (6) indique que, si on peut décomposer les fonctions d'atténuation A en des sommes de fonctions d'atténuation plus simples ou *élémentaires*, en un certain sens qui nous plaît, alors il suffirait de savoir inverser $\mathcal{R}A$ sur la transformée de ces fonctions « élémentaires » pour savoir inverser $\mathcal{R}A$ pour toute transformée.

Un type de fonction élémentaire venant facilement à l'esprit sont les fonctions « pixels » : une fonction d'atténuation valant zéro partout sauf sur un pixel d'écran, où elle vaut une certaine valeur a. Toute fonction A traitée par l'ordinateur est une somme de telles fonctions élémentaires. On peut donc se demander comment inverser $\mathcal{R}A$ appliquée à des fonctions pixels.

Dans un but pour le moment exploratoire – trouver des pistes raisonnables pour construire une réciproque de $\mathcal{R}A$ –, nous allons encore simplifier et chercher à inverser $\mathcal{R}A$ sur des « pixels idéaux », c'est-à-dire des fonctions d'atténuation qui concentreraient une atténuation de valeur $a > 0$ en un seul point du plan physique. Bien sûr, c'est physiquement impossible, la *densité d'atténuation* en ce point serait infinie. Mais il s'agit de manipuler un modèle très élémentaire pour réfléchir. Toute fonction d'atténuation peut être très bien approchée, en un certain sens, par un nombre très grand de tels « pixels idéaux » placés aux mailles d'un réseau très fin[4].

À présent, inverser $\mathcal{R}A$ pour une telle fonction d'atténuation idéale est très simple : imaginons en effet que A soit concentrée en un point (x_0, y_0) avec une valeur a. Dans ce cas limite :

- pour toutes les droites passant par (x_0, y_0), le cumul donnera a et donc la valeur moyenne sera a aussi, *i.e.* $A(x_0, y_0)$;
- pour tout autre point (x, y), parmi les droites passant par ce point, seule la droite reliant ce point à (x_0, y_0) donnera la valeur a et toutes les autres la valeur 0, donc la valeur moyenne donnera bien 0, *i.e.* $A(x, y)$.

On voit donc que sur les exemples idéaux, la rétroprojection s'obtient bien en moyennant le cumul le long de toutes les droites passant par le point considéré. Par linéarité, ce résultat s'étend aux sommes finies de telles distributions. Malheureusement, le retour aux pixels réels, non idéalement concentrés en un point, montre que cette idée ne fonctionne pas complètement, comme on va le voir dans la section suivante.

Le problème de floutage lié à la rétroprojection

Un exemple fondamental

On considère maintenant un « gros pixel », carré homogène donné par la fonction A qui vaut 1 sur un carré et 0 ailleurs (voir Le cumul d'atténuation le long d'un rayon). Si l'on considère $\mathcal{B}(\mathcal{R}A)$, on obtient la figure 11.

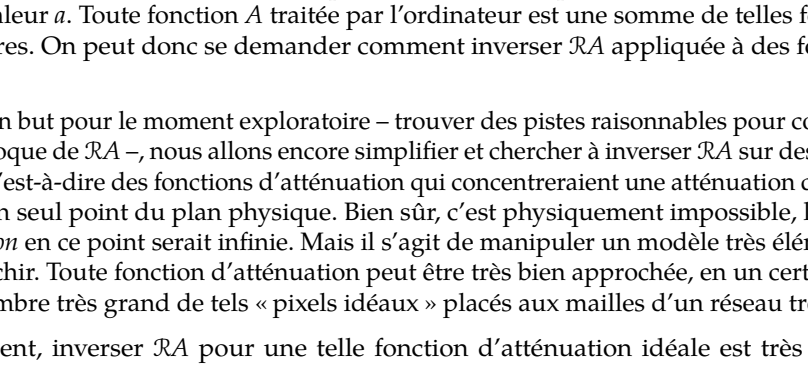


Figure 11 – Un gros pixel

Tout se passe bien au centre mais, autour du bord du pixel, un phénomène de floutage apparaît car, à partir de la fonction *discontinue* A, les fonctions $\mathcal{R}A$ et $\mathcal{B}$ vont fabriquer des fonctions *continues*. Le calcul exact de $\mathcal{B}(\mathcal{R}A)$ est plus facile en remplaçant le carré par un disque et l'on constate le même phénomène.

L'exemple d'un anneau

Considérons par exemple la fonction A constante égale à 1 sur l'anneau compris entre le cercle de centre O et de rayon 1 et celui de centre O et de rayon 1, 5, et nulle ailleurs. Alors pour chaque θ, on a $\mathcal{R}A(0, \theta) = 1$, donc $\mathcal{B}(\mathcal{R}A)(0, 0) = 1$ alors que $A(0, 0) = 0$.

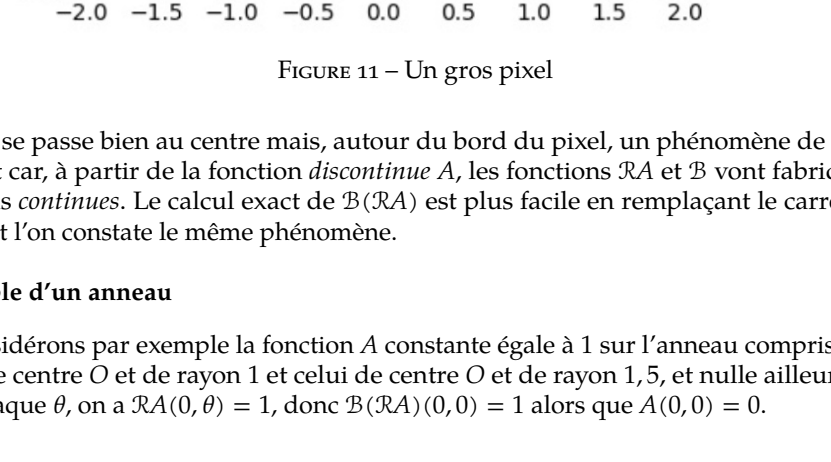


Figure 12 – Un anneau

En fait le calcul complet de $\mathcal{B}(\mathcal{R}A)$ montre que le floutage, qu'on peut voir comme l'effet cumulé, par linéarité, du floutage de chaque gros pixel, affecte l'ensemble des points du plan, avec une intensité d'autant plus forte que les points sont voisins de l'anneau initial, et qui décroît jusqu'à devenir négligeable loin de cet anneau, comme illustré sur la figure 13, où les zones sombres correspondent à des valeurs faibles mais pas encore nulles ! On notera que des valeurs numériques de $\mathcal{B}(\mathcal{R}A)$ sont ici supérieures à celles de A. Ici, tout l'intérieur du disque est dans le vert avec la valeur 1 au centre.

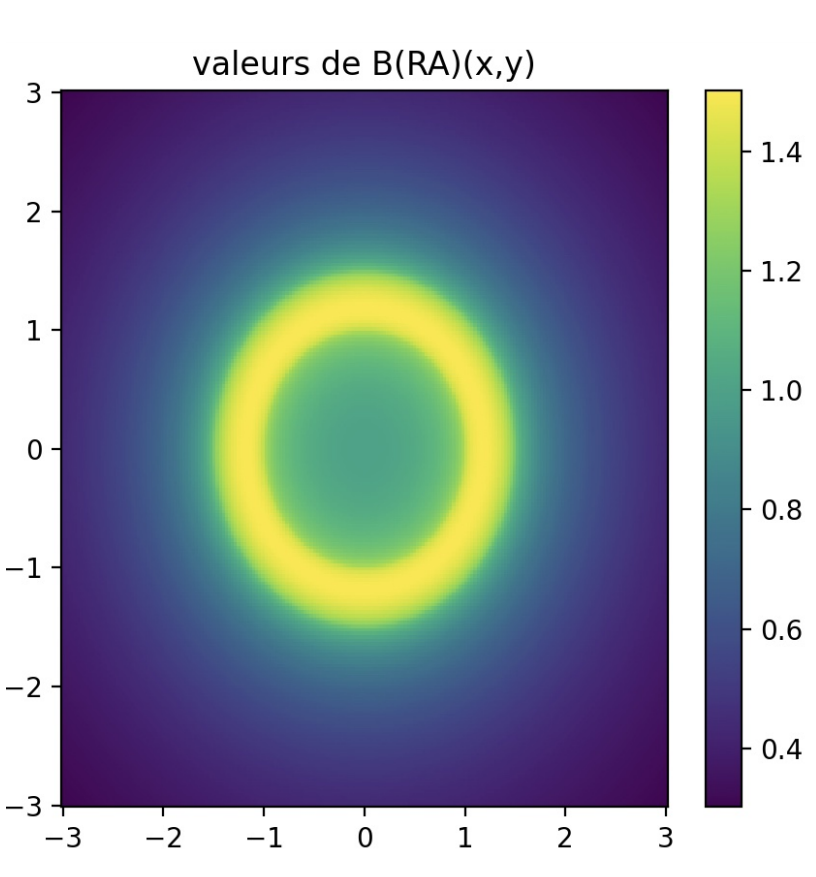


Figure 13 – Calcul de $\mathcal{B}(\mathcal{R}A)$ pour un anneau

On peut aussi bien comprendre ces calculs à partir du dessin de la transformée de Radon $\mathcal{R}A$ (figure 14). En effet, calculer pour un point (x, y) fixé la valeur de $\mathcal{B}(\mathcal{R}A)(x, y)$, c'est faire la moyenne de $\mathcal{R}A$ le long de la sinusoïde verticale d'équation $r = x\cos(\theta) + y\sin(\theta)$ qu'on pourrait dessiner sur l'image de $\mathcal{R}A$ précédente et dont l'amplitude est donc la distance de (x, y) à l'origine. Cette sinusoïde est la droite verticale d'équation $r = 0$ si $x = y = 0$.

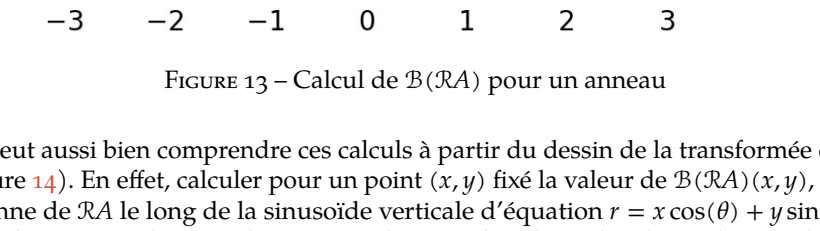


Figure 14 – Transformée de Radon $\mathcal{R}A$

Rétroprojection du fantôme de Shepp-Logan

On peut s'attendre au problème de floutage précédent lorsqu'on va appliquer la rétroprojection à la transformée de Radon du fantôme de Shepp-Logan et notamment on peut craindre que les trous ne disparaissent dans le flou. Ce n'est heureusement pas complètement le cas, mais on peut espérer mieux, notamment pour les petits trous en bas (figure 15).

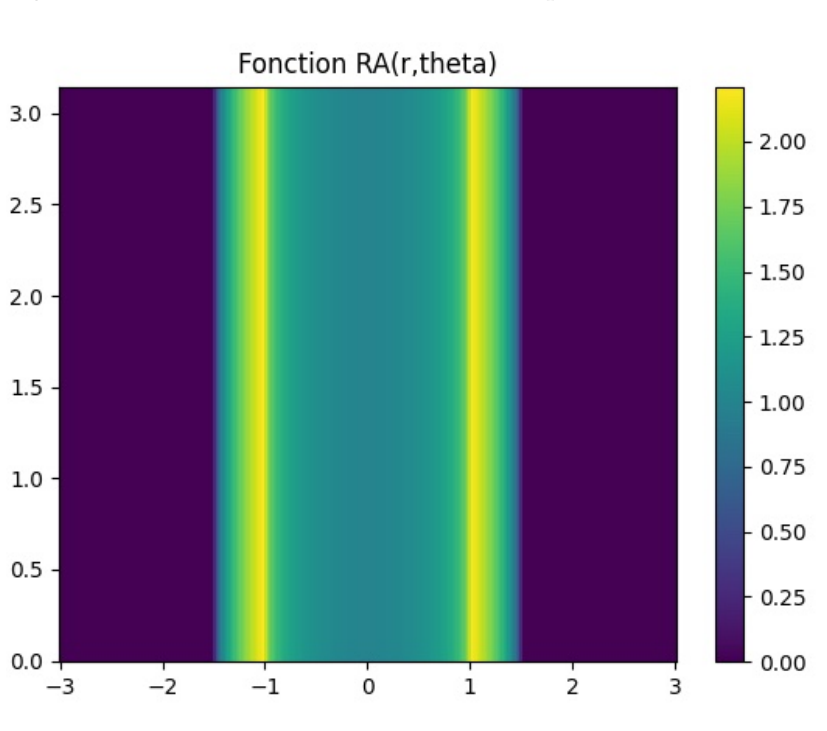


Figure 15 – Rétroprojection du fantôme de Shepp-Logan

Comment faire mieux : avec l'analyse de Fourier

Le résultat obtenu par « rétroprojection filtrée »

En faisant un peu plus de mathématiques pour améliorer l'idée de la rétroprojection, comme expliqué ci-dessous, on arrive au triptyque véritablement satisfaisant suivant, avec un algorithme implémenté dans le module `scikit`[5] de Python et qui sera explicité dans la dernière partie de cet article.

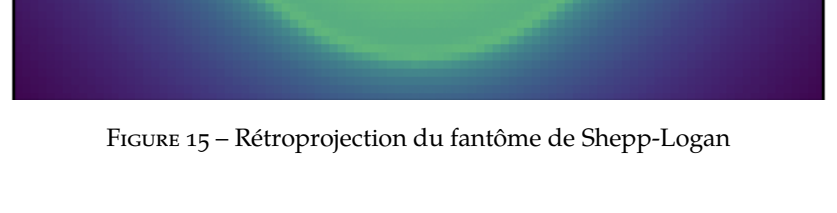


Figure 16 – Original (gauche) – Image détectée (centre) – Image reconstruite (droite)

> *Ainsi l'image reconstruite que les médecins peuvent analyser est une véritable* image de maths *!*

Quelques idées sur la rétroprojection filtrée

Cette section aborde les techniques d'intégration de Fourier nécessaires pour arriver aux résultats de la section Le résultat obtenu par « rétroprojection filtrée ». On ne précisera pas cependant les hypothèses de régularité ou d'intégrabilité dans les théorèmes : en fait on calculera « formellement » avec les intégrales ! On trouvera un article très complet sur l'analyse de Fourier publié dans *Images des mathématiques* [1], où la transformation de Fourier est évoquée au § 6.4.

La formule clef avec une preuve « formelle »

Fixons d'abord quelques notations sur la transformée de Fourier dans le cadre qui est le nôtre. Pour une fonction $f : (r, \theta) \in \mathbf{R} \times [0, \pi] \to f(r, \theta) \in \mathbf{C}$, on notera (sous réserve que l'intégrale ci-dessous soit bien définie) :

$$\forall\, s \in \mathbf{R}, \forall\, \theta \in [0,\pi],\ \mathcal{F}f(s,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r,\theta)e^{-isr}\,\mathrm{d}r$$

sa transformée de Fourier par rapport à la variable r, la variable θ étant fixée. De même si $g : (s, \theta) \in \mathbf{R} \times [0, \pi] \to \mathbf{C}$, on considérera

$$\forall\, r \in \mathbf{R}, \forall\, \theta \in [0,\pi],\ \mathcal{F}^{-1}g(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(s,\theta)e^{isr}\,\mathrm{d}s$$

Les dessins de la section Le résultat obtenu par « rétroprojection filtrée » découlent de calculs numériques à partir de la formule théorique suivante pour des fonctions A « raisonnables » :

$$A(x,y) = \frac{1}{2}\mathcal{B}\left(\mathcal{F}^{-1}(|S|\mathcal{F}(\mathcal{R}A)(S,\theta))(x,y)\right) \tag{7}$$

appelée *formule de rétroprojection filtrée*, où pour la fonction $\mathcal{R}A$, qui dépend de deux variables (r, θ), la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ se fait par rapport à la variable r, à θ fixé, et où on note S la variable « de fréquence » associée à la variable d'« espace » r. On suit ici l'exposé du chapitre 7 de [2].

La démonstration de la formule (7) utilise en fait, en plus, la transformation de Fourier bidimensionnelle dans $\mathbf{R}^2$ qu'on notera $\mathcal{F}_2$, définie comme suit. Pour $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, on note

$$\forall\,(X,Y) \in \mathbf{R}^2,\ (\mathcal{F}_2 h)(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)e^{-i(xX+yY)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

L'argument clef de la démonstration va venir de la *formule des projections et tranches* suivante :

$$\mathcal{F}_2 f(S\cos(\theta), S\sin(\theta)) = \int_{-\infty}^{+\infty}(\mathcal{R}f(t,\theta))e^{-iSt}\,\mathrm{d}t = \mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S,\theta) \tag{8}$$

Preuve ((8) $\implies$ (7)). Le point de départ est l'inversion de Fourier pour la transformée de Fourier bidimensionnelle :

$$\begin{aligned} A(x,y) &= (\mathcal{F}_2^{-1}\mathcal{F}_2 A)(x,y) \\ &= \tfrac{1}{4\pi^2}\textstyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}_2 f(X,Y)e^{+i(xX+yY)}\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y\end{aligned}$$

On remplace les coordonnées (X, Y) par les coordonnées polaires (S, θ), où $X = S\cos(\theta)$ et $Y = S\sin(\theta)$, avec $S \in \mathbf{R}$ et $0 \leq \theta \leq \pi$. Alors $\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y = |S|\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}\theta$. On en déduit que

$$A(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}_2 f(S\cos(\theta), S\sin(\theta))e^{+iS(x\cos(\theta)+y\sin(\theta))}|S|\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}\theta$$

C'est ici que la formule (8) des projections et tranches permet de reconnaître $\mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S, \theta)$ à l'intérieur de l'intégrale précédente de sorte que

$$A(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S,\theta)e^{+iS(x\cos(\theta)+y\sin(\theta))}|S|\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}\theta$$

Avec l'expression de la transformée de Fourier inverse $\mathcal{F}^{-1}$ on obtient

$$A(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \mathcal{F}^{-1}[|S|\mathcal{F}(\mathcal{R}f)(S,\theta)](x\cos(\theta) + y\sin(\theta), \theta)\,\mathrm{d}\theta$$

et, avec la définition de la rétroprojection $\mathcal{B}$, on obtient bien la formule (7). ☐

Preuve (*démonstration de la formule* (8) *des projections et des tranches*). Pour $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ et deux nombres réels S et θ, par définition :

$$\mathcal{F}_2 f(S\cos(\theta), S\sin(\theta)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)e^{-iS(x\cos(\theta)+y\sin(\theta))}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

En regroupant les couples (x, y) suivant la valeur de $t = x\cos(\theta) + y\sin(\theta)$, c'est-à-dire suivant les droites $D_{t,\theta}$, ce qu'on obtient en faisant plus explicitement le changement de variable

$$(t,s) \mapsto (x,y) = (t\cos(\theta) - s\sin(\theta), t\sin(\theta) + s\cos(\theta))$$

on obtient immédiatement

$$\mathcal{F}_2 f(S\cos(\theta), S\sin(\theta)) = \int_{-\infty}^{+\infty}(\mathcal{R}f(t,\theta))e^{-iSt}\,\mathrm{d}t$$

ce qui, par notre définition de la transformée de Fourier, donne finalement l'équation (8). ☐

Pourquoi *projections et tranches* (en anglais *projection slice*) ? Comme expliqué dans [6, p. 7], cette formule exprime la restriction de $\mathcal{F}_2$ à la droite $\mathbf{R}\omega$ où $\omega = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ (une « tranche ») au moyen des intégrales de f sur toutes les droites orthogonales à $\mathbf{R}\omega$ (« projections »). Toujours en citant François Rouvière, l'argument essentiel est que :

- pour chaque $\omega = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ fixé, le plan est la réunion disjointe de la famille des droites orthogonales à ω et l'on décompose l'intégration sur $\mathbf{R}^2$ à l'aide de ces droites ;
- le facteur exponentiel $e^{-i(xX+yY)}$ apparaissant dans $\mathcal{F}_2$ est constant, égal à e^{-iSt}, sur chaque droite $D_{t,\theta}$ orthogonale à ω.

Mise en oeuvre numérique

Sans le facteur $|S|$, dans la formule (7), tout se simplifierait et on retrouverait la rétroprojection $\mathcal{B}(\mathcal{R}A)$. Très intuitivement ce facteur renforce le rôle des hautes fréquences, dont on sait qu'elles sont cruciales en analyse de Fourier pour bien suivre les discontinuités.

Pour mettre en œuvre sur un ordinateur le calcul du membre de droite de l'équation (7), il faut en fait remplacer tous les objets *continus* évoqués ici (notamment les intégrales) par des objets *discrets* (indexés par un nombre fini de valeurs). Dans l'équation (7), en pratique, on remplace la fonction $S \mapsto |S|$ par un *filtre*, une fonction qui approche la valeur absolue sur un certain intervalle mais a l'avantage de s'écrire sous la forme $\mathcal{F}(\phi)$ pour une certaine fonction ϕ des variables (r, θ), ce qui, grâce à la propriété générale de la transformation de Fourier qui transforme les convolutions en produits usuels, nous donne

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\phi) \cdot \mathcal{F}(\mathcal{R}A)) = \phi * \mathcal{R}A$$

où $*$ désigne le produit de convolution et permet de simplifier l'équation (7) en

$$A \simeq \frac{1}{2}\mathcal{B}(\phi * \mathcal{R}A)$$

et ramène le calcul pratique à celui d'un produit de convolution.

Il existe plusieurs choix possibles de tels filtres $\mathcal{F}(\phi)$, un des plus simples consiste à tronquer la fonction valeur absolue, ce qui s'appelle le *filtre de Ram-Lak* (figure 17[6]).

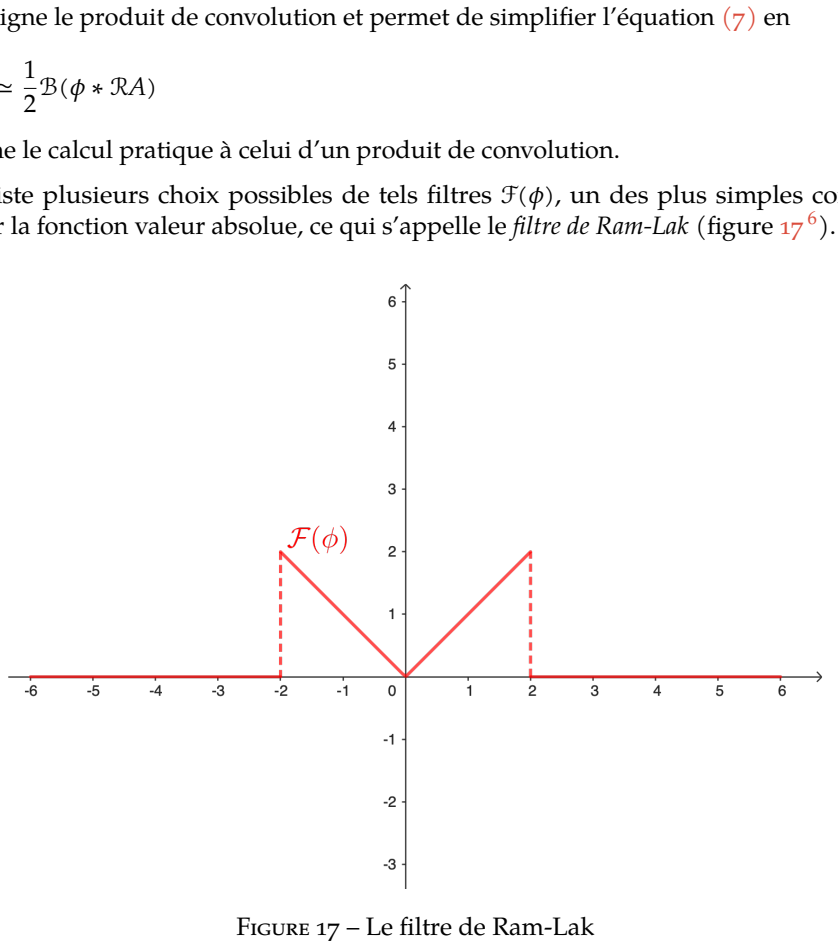


Figure 17 – Le filtre de Ram-Lak

Expériences vécues et perspectives

Nous avons mené le travail d'implémentation complète de ce calcul à partir de la formule (7) (suivant [2, chap. 8]), c'est-à-dire sans le module `scikit` dédié dont j'ai parlé dans la section Le résultat obtenu par « rétroprojection filtrée », avec des étudiants de deuxième année post-bac : Amaury Blanqué en 2022 ainsi qu'Eloïse Soulé et Antoine Chedid en 2023. Avec eux nous avons pu obtenir des images analogues à celles données par cet article mais aussi parfois à peine meilleures que la simple rétroprojection. Amaury a spécialement étudié l'influence du choix de l'interpolation pour les valeurs manquantes de $\phi * \mathcal{R}A$ nécessaires mais c'est un problème qui reste délicat à mener en pratique. Antoine m'a appris des nouvelles commandes graphiques en Python 3D car, avec Eloïse, ils ont aussi découvert des recherches très récentes sur la transformation de Radon conique en trois dimensions, reliées à la prise en compte de l'effet Compton et qui ont fait l'objet notamment de la thèse [3]. François Sauvageot m'a signalé une alternative pour mener des calculs plus algébriquement avec la transformée Mojette.

Références

[1] Hajer Bahouri et François Vigneron. « Le théorème de Radon ». *Images des mathématiques* (2019). URL : https://images.math.cnrs.fr/analyse-frequentielle-du-signal/.

[2] Thimothy G. Feeman. *The mathematics of medical imaging. A Beginner's guide*. Springer Undergraduate Texts in Mathematics et Technology, 2015.

[3] Patricio Guerrero Prado. « Three-dimensional reconstruction of flat heritage objects based on Compton scattering tomography ». Thèse de doct. Université Paris-Saclay, 2018.

[4] Benoît Kloeckner. « Le théorème de Radon ». *Billet publié sur Images des mathématiques* (2010). URL : https://images.math.cnrs.fr/billets/le-theoreme-de-radon/.

[5] Jean-Pierre Provost et Gérard Vallée. *Les maths en physique*. Dunod, 2006.

[6] François Rouvière. *Transformations de Radon. Cinq leçons de géométrie intégrale*. Calvage et Mounet, 2023. ISBN : 2493230078.

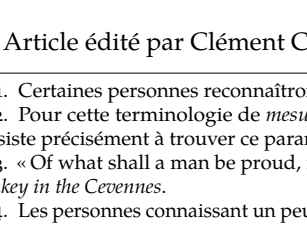
Crédits

Frontispice : Inrs-Ete

Remerciements

Je remercie d'abord mes trois étudiants Amaury Blanqué, Eloïse Soulé et Antoine Chedid qui ont bien joué le jeu de l'aventure de ces calculs, et de leur retours positifs.

Je remercie Clément Caubel pour ses encouragements pour cet article, sa relecture, ses bonnes suggestions et sa patience infinie, François Sauvageot pour toutes ses justes remarques et grâce à qui notamment j'ai refait la plupart de mes graphiques de la section L'image obtenue par les capteurs à partir de la forme originale, ce qui était vraiment nécessaire pour la clarté de l'ensemble ! Je remercie mon ami Charles Boubel qui a aussi pris le temps de relire cet article, suggéré des améliorations à faire et pour toute la section Heuristique de la rétroprojection, ainsi que le deuxième rapporteur de cet article pour d'autres corrections très utiles. Bref, cet article est le fruit d'une vraie collaboration.



Romain Bondil
Professeur en CPGE – Lycée Joffre, Montpellier

Article édité par Clément Caubel.

---

[1] Certaines personnes reconnaîtront la loi de Beer-Lambert.

[2] Pour cette terminologie de *mesure*, voir [5, p. 4] : « la *mesure* d'une grandeur, par opposition à son *repérage*, consiste précisément à trouver ce paramétrage additif. »

[3] « Of what shall a man be proud, if he is not proud of his friends ? », R. L. Stevenson, dédicace de *Travels with a Donkey in the Cevennes*.

[4] Les personnes connaissant un peu de théorie de la mesure ou celles faisant plutôt de la physique ont ici reconnu des mesures de Dirac.

[5] Et même plus précisément, le module `skimage.transform`.

[6] Les coordonnées en abscisses sont ici arbitraires.