L’exponentielle au fil du temps

Note pour l’éditeur Cette nouvelle version de l’article est radicalement différente de la version précédente, que j’ai eu l’imprudence de faire circuler. Contrairement à cette dernière elle n’utilise pas de simulations par ordinateur, mais seulement des dessins *faits à la main*, et que le lecteur est encouragé à refaire lui-même. S’appuyant ainsi sur l’intelligence manuelle et visuelle du lecteur, cette version 2025 devrait être accessible (du moins je l’espère) sans aucune connaissance mathématique. Elle devrait pouvoir servir d’introduction aux exponentielles en début de Lycée (et pourrait être utile aussi en début d’Université !).

(Exp) Une grandeur positive est dite évoluer de manière *exponentielle* si en un laps de temps T quelconque elle est multipliée par un facteur *qui ne dépend que de* T.

Selon que ce facteur est supérieur ou inférieur à 1, l’évolution sera *exponentielle croissante* ou *exponentielle décroissante.* L’exemple le plus typique d’évolution exponentielle décroissante est la façon dont décroît, avec le temps, l’activité d’une substance radioactive. Le temps qu’il faut à la substance pour que son activité décroisse de moitié est ce qu’on appelle la *période* (ou, de façon quelque peu trompeuse, la *demi-vie*) de la substance radioactive.

« Demi-vies » de quelques substances radioactives

Carbone 14	Environ 5.730 ans	(datation en archéologie)
Césium 137	Environ 30 ans	(source de pollution marine suite à la catastrophe de Fukushima)
Plutonium 239	24110 ans	(que faire des résidus des centrales nucléaires ?)

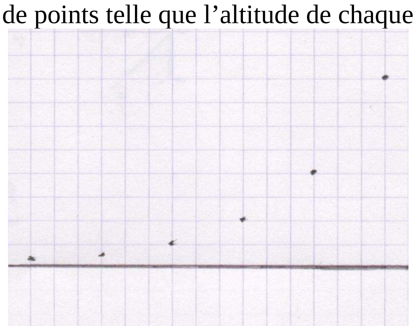
Dans sa grande simplicité, la propriété (Exp) recèle une beauté géométrique que nous allons explorer par le dessin. C’est ainsi, par des dessins *à la main* sur du papier, que nous découvrirons ce qu’est une *équation différentielle,* et comment un simple geste (ou plutôt *l’idée* d’un geste) permet « d’intégrer une équation différentielle » – conduisant au calcul d’un des nombres les plus importants des mathématiques, *le nombre* e *d’Euler.*

§1 - Exponentielles de dessinateurs

Vous voulez dessiner une exponentielle ? Voici une façon possible de vous y prendre.

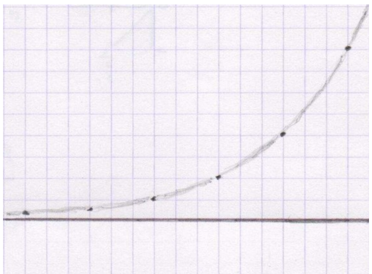
Activité n°0 : dessiner une exponentielle

Sur une feuille de papier quadrillé, dessinez une droite horizontale (l’axe des temps), et au dessus de cette droite, à des intervalles de temps réguliers, une suite de points telle que l’altitude de chaque point soit double de celle du précédent.



Puis, *d’un beau geste de la main, simple et naturel,* tracez une courbe passant par ces points :

Dessin n°0



Enfin, recopiez la figure sur une feuille de papier calque, de façon à ce qu'on n'y voie plus le quadrillage, ni la suite de points initiale.

Activité n°1 : tester si une courbe est exponentielle

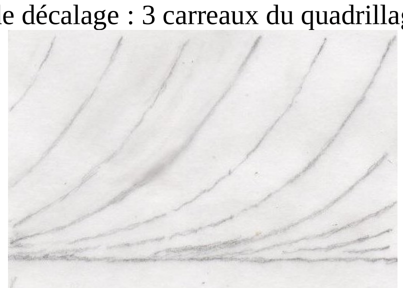
Imaginez maintenant qu'on vous donne un dessin sur papier censé représenter une exponentielle. Comment s'assurer que c'en est bien une ? Décalquez le dessin et faites glisser le calque horizontalement vers la droite ou vers la gauche, obtenant ainsi ce qu'on peut appeler des « décalages temporels » de la courbe d'évolution.
Reformulée en termes de décalages temporels, la propriété (Exp) peut s'énoncer ainsi :

(Exp) *l'évolution d'une grandeur positive est dite exponentielle*
si décalée dans le temps elle reste la même à un facteur près.
(facteur différent de 1 tant que le décalage n'est pas nul)

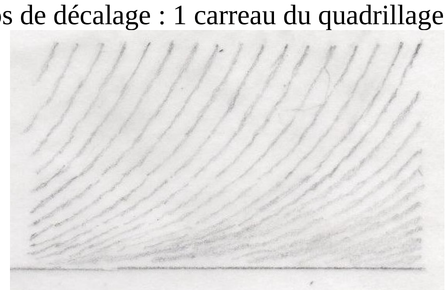
Traduction graphique : de même qu'un décalage temporel se traduit *horizontalement* par un *écart constant* entre la courbe et sa décalée, de même *verticalement* il s'agit de tester que les altitudes de ces deux courbes sont *dans un rapport constant.* Voyez par exemple sur le dessin n°1 (gauche) comment l'altitude de chaque courbe est *double* de celle de sa voisine de droite : un simple regard suffit, pas besoin de faire une infinité de mesures, double décimètre en main ! C'est notre *intelligence visuelle* qui est à l'oeuvre – notre « sens des proportions », ce même sens qui permet à un artiste de juger si son dessin respecte les proportions de son modèle ! Et si le dessin n°0 passe à peu près correctement ce « test visuel », c'est par la vertu du « beau geste de la main, simple et naturel » qui a servi à le tracer : *l'intelligence manuelle !*
Si la notion de « beau geste » vous chiffonne (comment définir le « beau »?), essayez la contre-épreuve suivante : tracer une courbe qui, bien qu'en pente de plus en plus raide et passant par tous les points de l'activité n°0, échouera au test visuel ci-dessus. Ça y est, vous avez réussi à en tracer une ? N'est-elle pas un peu *moche* ?

Dessin n°1
Successions de décalages temporels du dessin n°0

Temps de décalage : 3 carreaux du quadrillage initial



Temps de décalage : 1 carreau du quadrillage initial



Pardon pour les imperfections de ces dessins ! Vous pouvez sûrement en tracer de meilleurs !

Réseaux exponentiels Bien sûr quand un mathématicien dessine ou observe une figure, c'est pour s'en faire une image mentale idéalisée, et c'est cette *figure idéale* qui est son véritable objet d'intérêt : un axe des temps *illimité dans les deux sens*, s'étendant vers l'infini du passé comme vers l'infini du futur ; des courbes d'évolution s'étendant elles aussi vers l'infini du passé et vers l'infini du futur, au lieu d'être limitées par un cadre comme celui du dessin n°1. Et en regardant ce dessin nous pouvons aussi nous représenter en imagination le réseau de *toutes* les courbes déduites de la courbe initiale par *tous* les décalages temporels (on ne pourrait pas les dessiner toutes car cela noircirait uniformément l'image !) : *un réseau de courbes qui remplissent tout le demi-plan supérieur sans se rencontrer*. Par construction, ces courbes peuvent se déduire les unes des autres horizontalement, par *translation* (décalage temporel) ; et s'il s'agit bien de courbes exponentielles elles peuvent aussi se déduire les unes des autres verticalement, *par « étirement vertical »* (multiplication de l'altitude par un facteur non nul ne dépendant que du « temps de décalage »).
Nous appellerons « réseau exponentiel » un réseau pouvant être engendré de ces deux façons.

Temps qui s'écoule et temps qui se mesure Quand on parle de « temps » on peut comprendre *« instant »* (« arriver juste à temps »), ou bien *« durée »* (« combien de temps … ? »). Les *instants* ne se mesurent pas, tout au plus peut-on les *repérer* – par la position de l'aiguille d'une horloge, ou d'un point sur un « axe des temps ». Ce qui peut se mesurer, ce sont les *durées* – les *longueurs de temps* (comme ici la longueur du *temps de décalage* entre les deux courbes) : on peut ajouter deux durées, multiplier une durée par un nombre etc.

Une manière d'identifier les deux notions est de *choisir une origine des temps*, ce qui permet de repérer les instants par la durée les séparant de l'instant zéro (comptée positivement ou négativement selon qu'on se place d'un côté ou de l'autre de cet instant zéro). Si l'on choisit de plus une *unité de temps*, cela fait de la variable « temps » une variable *numérique*. Nous le ferons seulement au dernier paragraphe de ce texte.

Relation entre temps de décalage et rapport de décalage Le « *temps de décalage* » est une mesure « horizontale » des décalages ; mais nous pouvons aussi mesurer ceux-ci « verticalement », par le *facteur (ou rapport) de décalage*. Quand on enchaîne les décalages successifs, les temps de décalage s'ajoutent, les rapports de décalage se multiplient. *En regardant comment les courbes d'un réseau exponentiel se déduisent les unes des autres, on peut ainsi voir qu'addition* (des décalages horizontaux) *et multiplication* (des décalages verticaux) *sont deux opérations qui reviennent au même !* ***Toute l'idée d'exponentielle est dans cette relation entre temps de décalage et rapports de décalage, qui transforme les additions en multiplications.***

Si l'on préfère travailler sur des formules (comme nous le ferons à la fin de ce texte), cette relation entre addition et multiplication peut aussi se voir sur *une* exponentielle particulière, que l'on aura « normalisée » en choisissant en abscisse une origine des temps, et en convenant de prendre comme unité en ordonnée l'altitude à l'instant zéro. Le choix d'une origine des temps permet, comme on l'a vu, d'identifier instants et longueurs de temps (comptées positivement ou négativement) ; notant $u(t)$ l'altitude à l'instant t, la convention $u(0) = 1$ permet d'identifier le « rapport de décalage » $u(t)/u(0)$ à $u(t)$ (« l'altitude au temps t »). Avec ces identifications en tête, on voit immédiatement que la propriété (Exp) peut se reformuler ainsi :

le rapport $u(s+t)/u(s)$ est égal à $u(t)/u(0)$, donc à $u(t)$; autrement dit $u(s+t) = u(s)\,u(t)$.

Comment toutes les exponentielles se ramènent à une seule Un « réseau exponentiel » comme celui dont nous venons de parler dépend d'un seul arbitraire : le « temps de doublement » (temps que met la grandeur étudiée pour doubler). On peut donc dire que par changement d'échelle *toutes les exponentielles croissantes se ramènent à une seule.* Il en est de même des exponentielles décroissantes, qui d'ailleurs se ramènent aux précédentes en inversant le sens du temps (retourner la feuille de papier calque, de sorte que le « temps de doublement » devient « demi-vie »).

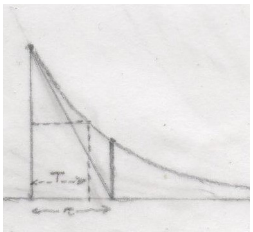
§2 - Les exponentielles au microscope

Les exponentielles (c.à.d. les courbes représentatives d'évolutions exponentielles) ont une propriété très appréciée des mathématiciens : ce sont des courbes *lisses.* Dire qu'une courbe plane est *lisse* en un point, c'est dire qu'en la regardant au microscope (un microscope centré sur ce point) ce qu'on voit tend à ressembler à une droite, et à y ressembler de plus en plus quand on augmente le grossissement du microscope ; cette droite limite est la *tangente* à la courbe au point considéré. Intuitivement, la lissité est l'idéal que recherche un dessinateur par son « beau geste de la main » évitant les à-coups (points anguleux), les tremblements, etc.

Pour un exemple extrême de courbe *non lisse*, imaginez la cartographie d'une côte déchiquetée comme la côte bretonne, où en zoomant indéfiniment sur la carte on verrait sans cesse apparaître de nouveaux accidents (exemple cher aux spécialistes des « objets fractals »).

Considérons donc le réseau de courbes lisses qu'est un « réseau exponentiel ». Par tout point du demi-plan supérieur passe une courbe du réseau, qui étant lisse admet une tangente, que nous appellerons la « tangente au réseau en ce point ». La donnée d'un point et de la tangente au réseau en ce point est ce que nous appellerons un *élément de contact* du réseau. Connaissant un élément de contact d'un réseau exponentiel, il est très facile d'en déduire tous les autres. En effet étant tangents aux courbes du réseau, ils peuvent comme elles se déduire les uns des autres de deux façons, par translation horizontale ou par étirement vertical. L'une comme l'autre de ces deux transformations *laisse invariante la longueur du segment sous la tangente* – une longueur de temps, que nous appellerons le ***temps caractéristique*** de l'évolution.
Le dessin ci-après représente le temps caractéristique τ et la demi-vie T d'une exponentielle décroissante, permettant de vous faire une idée de l'ordre de grandeur du rapport τ/T : un peu plus de 1,4 (en fait, comme on le verra au paragraphe suivant, la vraie valeur est proche de 1,44).

Dessin n°2
Temps caractéristique et demi-vie d'une exponentielle décroissante
(la courbe utilisée ici est celle du dessin n°0, vue « à l'envers » en retournant le papier calque)



Une histoire de citerne qui fuit Imaginons qu'on détecte une fuite d'eau dans une citerne. Si la vitesse de la fuite reste constante, la quantité d'eau va décroître de façon linéaire, et la citerne se videra en un temps fini. Si par contre, au lieu d'être constante, *la vitesse d'écoulement est proportionnelle à la quantité d'eau restant dans la citerne* – de sorte que l'importance de la fuite décroît en même temps que la quantité d'eau – la décroissance sera exponentielle, et pourra être représentée par une courbe comme celle du dessin n°2, dans laquelle la hauteur du bâton de gauche représente le volume d'eau au moment où la fuite est détectée, la droite descendante représentant la décroissance linéaire du volume dans l'hypothèse où la vitesse de la fuite reste constante.

Imaginons par exemple que le volume d'eau initial soit de 1000 litres, et que le débit de la fuite soit initialement de 1 cl par seconde. Au bout de combien de temps le volume d'eau aura-t-il décru de moitié ? Si ce débit restait constant, la cuve se viderait en un temps τ égal à100000 secondes, soit 27 heures et 46 minutes environ. Dans l'hypothèse d'une vitesse de fuite proportionnelle au volume d'eau restant, la décroissance sera exponentielle, avec une « demi-vie » environ 1,44 fois plus petite, soit environ 69400 secondes, c-à-d. 19 heures et 20 minutes.

Un autre rapport intéressant qu'on peut estimer sur le dessin n°2 est le *rapport de décalage* associé au temps de décalage τ : c'est le *nombre d'Euler* e (rapport des deux hauteurs en traits gras, environ 2,7), dont nous reparlerons au paragraphe suivant.

Idée d'activité n°2 : le « crayon magique »,
ou comment dessiner le réseau à partir de ses données de contact

La donnée du temps caractéristique τ suffit donc à déterminer tous les éléments de contact d'un réseau exponentiel – sachant par ailleurs s'il est croissant ou décroissant. Connaissant ainsi tous les éléments de contact, comment pouvons-nous tracer les courbes du réseau ? Imaginons que nous disposions d'un *crayon magique*, tel qu'en posant la pointe du crayon sur notre feuille de papier cela suffise à faire apparaître *instantanément* la tangente au réseau en ce point. Cette tangente nous donne le « cap » à suivre pour déplacer notre crayon dans la bonne direction (vers la droite ou vers la gauche) – un cap toujours changeant, qui change avec la position de notre pointe de crayon !
Nous sommes dans la situation d'un navigateur dont les instruments de navigation lui donnent le « cap » à suivre, mais un cap qui change continuellement avec sa position !
Bien sûr je n'ai pas de « crayon magique » à vous fournir ! Mais si j'étais expert en programmation informatique je pourrais créer un logiciel faisant de la souris un « crayon magique » – de sorte que cliquer en un point de l'écran fasse apparaître instantanément l'élément de contact en ce point. Et la main humaine, tenant la souris, n'aurait plus qu'à faire glisser celle-ci en respectant bien le cap donné par l'ordinateur !
Dommage d'en être réduit pour le moment à *imaginer* la chose, j'aimerais tant pouvoir faire moi-même l'expérience *pour de vrai* !

Mise en équations Notons u la grandeur dont nous voulons étudier l'évolution. Parler « d'évolution », c'est dire que cette grandeur u n'a pas une valeur déterminée, sa valeur u(t) « est fonction » du temps t (le mot « temps » est pris ici au sens « d'instant »). On notera u' la *vitesse* de l'évolution, vitesse qui elle aussi est fonction de t. Graphiquement, cette vitesse à l'instant t se lit très simplement sur la courbe représentative de l'évolution : c'est la *pente de la tangente* au point d'abscisse t.

Parler de « vitesse » sous-entend qu'on parle d'une fonction du temps. Dans le cas général où la variable n'est pas forcément le temps, au lieu de parler de vitesse on parle de *dérivée* de la fonction u : c'est la pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction, tangente qui existe dans la mesure où cette courbe est *lisse* ; dans le langage général des fonctions, on appelle *fonction dérivable* une fonction dont la courbe représentative est lisse.

Au lieu de nous intéresser à *une seule* fonction du temps, revenons à notre *réseau* de fonctions exponentielles, et à la façon dont les éléments de contact de ce réseau dépendent de la position du point de contact. Tout ce qui a été dit sur cette dépendance peut se résumer à ceci :

la pente u' de la tangente ne dépend que de l'altitude u, *et est proportionnelle à* u :

Pour un réseau exponentiel croissant	Pour un réseau exponentiel décroissant
$u' = u/\tau$	$u' = - u/\tau$

(où τ est le temps caractéristique).

Une équation liant ainsi une fonction à sa dérivée est ce qu'on appelle une *équation différentielle* (cf. encadré ci-dessous). *Résoudre* (ou *intégrer*) une équation différentielle, c'est déterminer le réseau de toutes les fonctions vérifiant cette équation, comme vous auriez pu le faire graphiquement avec le « crayon magique » de l'activité précédente.

Equations différentielles

On a vu plus haut que la tangente à une courbe lisse en un point est la droite qui approche le mieux cette courbe dans un voisinage « infinitésimal » de ce point – la droite que l'on voit « à la limite » en regardant la courbe au microscope.
On a vu aussi que si la courbe est le graphe d'une fonction u d'une variable t, la pente de la tangente est ce qu'on appelle la *dérivée* de la fonction u, dérivée que l'on note u' ou encore du/dt. Cette dernière notation – la *notation différentielle* – est héritée de Leibniz, qui la voyait comme désignant vraiment un quotient, avec au dénominateur un « accroissement infinitésimal » dt de la variable t, et au numérateur l'accroissement correspondant (noté du) de la fonction u. La plupart des mathématiciens d'aujourd'hui ont renoncé (bien que ce soit possible) à utiliser de façon mathématiquement rigoureuse les « infinitésimaux » de Leibniz ; mais ils ont conservé beaucoup de ses notations, qui parlent bien à l'intuition.
On appelle donc *Calcul différentiel* le chapitre des mathématiques qui tourne autour de la notion de « dérivée », et *équation différentielle* (du premier ordre) une équation reliant une fonction à sa dérivée.

§3 – De l'image au nombre : l'exponentielle canonique d'Euler

Nous avons vu à la fin du paragraphe 1 que « toutes les exponentielles se ramènent à une seule ». Les mathématiciens, qui n'aiment rien tant que les fonctions *numériques* de variable *numérique,* aiment prendre comme exponentielle « de référence » ce qu'ils appellent « l'exponentielle canonique » d'Euler : c'est la solution de l'équation différentielle

$$u' = u \qquad (E)$$

(équation d'Euler)

avec la condition initiale u(0) = 1.

On la note exp.

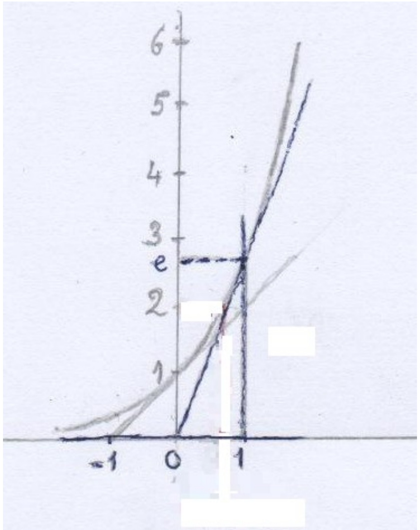
Sa valeur en 1 est le

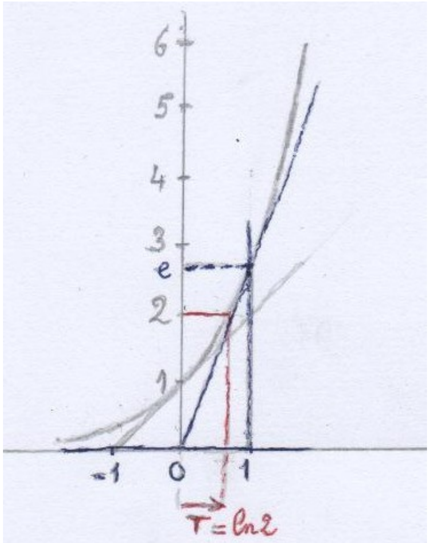
nombre d'Euler e = exp(1) :

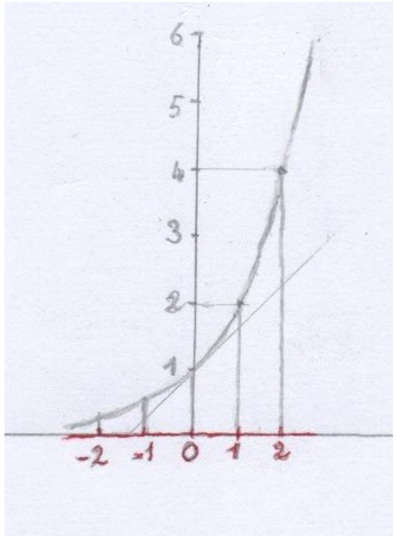
l'un des nombres les plus importants des mathématiques !

Dans l'esprit des paragraphes précédents, nous pouvons tracer « à main levée » la courbe représentative de cette fonction, avec ses deux tangentes remarquables (dessin n°3) : au point d'abscisse 0 (et d'ordonnée 1), la tangente est de pente 1 (on a pris la même échelle sur les deux axes) ; au point d'abscisse 1 (dont l'ordonnée est le nombre d'Euler e, environ 2,7), la tangente passe par l'origine (ce qui traduit le fait que notre unité en abscisse est le « temps caractéristique » τ).

Dessin n°3	***Dessin n°3bis***	***Dessin n°3ter***
La fonction exp	***La fonction exp*** et son temps T « de doublement »	***La fonction « 2 à la puissance t »***







Le paragraphe précédent nous a permis de trouver graphiquement la valeur de e, de façon très approximative bien sûr. Mais comment calculer cette valeur de façon précise ?
Une méthode très naturelle est la *méthode d'Euler* : d'une portée beaucoup plus vaste que le simple calcul de e, elle peut s'appliquer à la résolution numérique de toutes les équations différentielles (du premier ordre) « suffisamment gentilles ».
Le principe de la méthode est le même que dans l'activité n°2 du paragraphe ci-avant : tracer une courbe en s'appliquant à toujours bien « respecter le cap » donné par l'équation différentielle. Bien sûr, même en disposant d'un « crayon magique » et si habile qu'on puisse être à « garder le cap », notre travail ne peut pas être d'une précision parfaite, et il en est de même de toutes les activités graphiques qui vous ont été suggérées précédemment. C'est que ces activités avaient pour seul but de vous faire *comprendre des idées mathématiques* en faisant appel à votre intelligence visuelle et manuelle, et il reste un travail à faire si l'on veut en tirer des résultats numériquement précis.
Comment donc, à partir de l'idée d'un « cap à respecter », peut-on concevoir un programme de calcul de la fonction exp, donnant une valeur précise du nombre e ?
Imaginons un robot qui, incapable d'avoir des mouvements fluides, ne sait avancer que tout droit, de manière saccadée, pas après pas, corrigeant son cap à la fin de chaque pas ; sa trajectoire ne sera pas une courbe mais une ligne brisée à n côtés (n « pas »), qui ne vérifiera l'équation différentielle qu'à chaque « correction de cap ». L'idée est qu'en augmentant indéfiniment le nombre n de « pas », donc le nombre de corrections de cap, on devrait obtenir une trajectoire de plus en plus proche de la vraie trajectoire.
C'est l'idée de base de la « méthode d'Euler », qui a permis à nos ancêtres de calculer le nombre e (et la fonction exp) avec une précision impressionnante, grâce à leur courage pour mener à bien des calculs fastidieux – calculs qu'heureusement nous pouvons aujourd'hui faire effectuer par l'ordinateur !

Pour prendre un autre exemple, considérons le rapport entre le temps caractéristique τ et le « temps de doublement » T d'une croissance exponentielle – que nous avons pu évaluer visuellement au §2

– et demandons-nous comment la valeur de ce rapport peut être calculée avec précision. Commençons par visualiser à nouveau les grandeurs en question sur le dessin n°3 , enrichi en 3^{bis}.
Comment calculer avec précision la valeur T représentée sur ce dessin ? Votre calculette peut faire le travail pour vous : elle dispose d'une touche donnant la fonction ln (« logarithme naturel »), grâce à laquelle vous obtenez immédiatement T = ln 2 = 0,6931472…, de sorte que τ/T = 1/ln 2 = 1,442695…

Logarithme naturel et exponentielle d'Euler, deux fonctions « inverses » l'une de l'autre

Imaginez qu'un point parcoure de gauche à droite la courbe ci-dessus dans son intégralité (y compris ses parties non vues car sortant du cadre de l'image!). Sa projection t sur l'axe horizontal parcourt alors tout cet axe (de gauche à droite, sans revenir en arrière), tandis que sa projection u sur le demi-axe vertical parcourt tout ce demi-axe (de bas en haut, sans revenir en arrière). Notre courbe met ainsi en correspondance toutes les valeurs de t avec toutes les valeurs >0 de u. Lue dans le sens « t donne u », cette correspondance définit la fonction exp ; lue dans le sens inverse (« u donne t » elle définit la fonction ln (logarithme naturel, encore appelée « logarithme népérien » en hommage à John Napier, mathématicien écossais du 17^e siècle). Autrement dit, *écrire* u = exp(t) *ou* t = ln(u) *sont deux façons d'écrire la même chose.*

De même qu'on peut définir la fonction exp par l'équation différentielle u'= u, avec la condition initiale u(0) = 1, par quelle équation différentielle peut-on définir la fonction ln ?
Pour répondre, le plus simple est de recourir aux notations différentielles de Leibniz :
du/dt = u peut encore s'écrire dt/du = 1/u. La fonction ln de la variable positive u a donc pour dérivée 1/u. C'est donc ce qu'on appelle une « primitive » de la fonction 1/u, *entièrement déterminée par cette propriété, avec la condition initiale* ln(1) = 0.
Sur la base de cette définition, qui se prête bien au calcul, beaucoup de cours de maths commencent par présenter la fonction ln avant d'introduire la fonction exp, qu'ils présentent ensuite comme « la fonction inverse » du logarithme naturel. Ma calculette de poche (d'un modèle assez basique) n'a pas de touche exp, mais seulement une touche ln. Si par exemple je veux connaître avec une certaine précision le nombre d'Euler e = exp(1), je dois procéder ainsi : après avoir entré le nombre 1, je tape sur la touche inv puis sur la touche ln ; ayant alors tapé sur =, je vois s'afficher à l'écran le nombre 2,7182818.

La notation exponentielle

Le dessin n°3 peut être considéré comme le modèle universel d'un processus exponentiel croissant dans lequel on a pris le temps caractéristique τ comme unité de temps. Mais pourquoi ne pas prendre une autre unité de temps, par exemple le « temps de doublement » T calculé plus haut (cf. dessin $n°3^{ter}$) ?
Avec cette nouvelle graduation de l'axe des temps, notre courbe passe par les valeurs u = 1, 2, 2^2, 2^3, …, 2^n, ... pour t = 0, 1, 2, 3, …, n,… , et il est donc naturel de noter 2^t, et d'appeler « 2 à la puissance t » la valeur pour t quelconque de notre fonction : u(t) = 2^t. Rappelons qu'étant « normalisée » par la condition initiale u(0) = 1, cette fonction exponentielle transforme les sommes en produits (cf. encadré à la fin du paragraphe 1) :

$$2^{s+t} = 2^s\, 2^t$$

– comme il sied pour une fonction censée étendre la fonction 2^n de la variable entière n.
Et c'est de cette notation, où la variable figure en exposant, que vient la terminologie « fonction exponentielle ».
Dans tout ce qui précède, le nombre 2 aurait pu être remplacé par n'importe quel nombre a >0, définissant la fonction a^t. En particulier, prenant pour a la constante d'Euler e, on obtient pour l'exponentielle canonique la notation e^t :

$$\exp(t) = e^t$$

Toutes les exponentielles normalisées se ramènent à l'exponentielle canonique par un simple changement d'échelle, qui apparaît de façon évidente en notation exponentielle :

$$a^t = e^{t \ln a} \;\; (= (e^{\ln a})^t = a^t)$$

Pour tous calculs numériques utilisant ces notions, une touche de ma calculette résume tout : la touche y^x ; pour m'assurer que je savais m'en servir, j'ai voulu vérifier que je savais faire dire à ma calculette que $2^3 = 8$ (« deux à la puissance trois égale huit »). Il m'a suffit pour cela d'entrer le nombre 2, puis de taper la touche y^x, puis d'entrer le nombre 3 : en tapant alors sur = , j'ai vu 8 s'afficher à l'écran. Merci la calculette !
De même, si l'on me demande une valeur numérique précise de ce que devrait être le rapport de décalage entre deux courbes successives du dessin n°1 (droite), il me suffit de remarquer que trois tels décalages successifs sont censés donner le rapport 2. Le rapport cherché est donc $2^{1/3}$, pour lequel la calculette me donne la valeur 1,259921.