ÇA N'EST PAS DES MATHS...

Frédéric PHAM
Laboratoire J.A.Dieudonné
Université de Nice-Sophia Antipolis

à Patricia YONNET,
qui m'a offert ce merveilleux koan.

Résumé : L'exclamation naïve d'une écolière me fournit le point de départ d'une réflexion-témoignage sur ma démarche d'enseignant de mathématiques : l'image des maths que j'ai envie de transmettre, mes déboires et succès, mes efforts pour "prendre les étudiants comme ils sont'' — et comment tout cela m'amène à "détricoter'' sans cesse ma compréhension des mathématiques, selon le principe que "les maths ne sont pas des maths'' !

1. — La vérité sort de la bouche des enfants

C'était en juin 1997, dans ce merveilleux endroit qu'est le parc Valrose (campus de la Faculté des Sciences de l'Université de Nice). J'assistais à la finale du "rallye mathématique" de l'Académie. Le parc était plein d'enfants (élèves des lycées et collèges) se livrant à toutes sortes d'activités : les uns tendant des cordes entre les arbres du parc, d'autres empilant d'étranges constructions en carton, etc. — tout cela en équipe (car le "rallye" est une compétition entre classes, pas une compétition individuelle). Nous étions là à bavarder, petit groupe de collègues (professeurs de l'enseignement secondaire ou d'université), échangeant nos impressions sur ce que nous observions (nous émerveillant par exemple de la capacité d'organisation de certains groupes d'élèves). Soudain une autre collègue arrive, hilare.

Vous savez ce qu'ils m'ont dit, les gamins ? Je leur demande "Alors, ça vous plaît ?"

— *Oh oui madame, ça nous plaît !*

— *Ça nous plaît, mais ça n'est pas des maths !*

— Ah bon ? Pourquoi dites-vous que ça n'est pas des maths ?

— *Ça n'est pas des maths, car il faut réfléchir !*

Nous avons tous bien ri, et souvent par la suite j'ai fait rire des collègues en leur racontant cette histoire. Sans doute derrière ce rire se cache-t-il des sentiments mêlés ("voilà quelle idée ils se font des maths, n'est-ce pas un peu triste, et comment en sommes-nous arrivés là ?", etc., etc.). Mais au fil des années, la phrase

Ça n'est pas des maths,
car il faut réfléchir !

a fait son chemin dans mon esprit. Et si au lieu d'en rire (ou d'en pleurer), je prenais cette phrase pour ce qu'elle était dans la bouche de cet enfant : l'expression d'une *évidence* ? évidence paradoxale, inacceptable pour un mathématicien, mais d'autant plus féconde qu'elle est inacceptable et paradoxale, comme un "koan" offert par un maître zen à son disciple [1] ! Pour le mathématicien que je suis, quel merveilleux *koan* que celui-là ! Au cas où je serais tenté de l'oublier, combien de fois mes élèves, mes collègues ne se chargent-ils pas de me le rappeler, en prononçant la phrase magique "ça n'est pas des maths"! Quelle richesse dans cette phrase, pour peu qu'on s'interroge sur l'état d'esprit (le nôtre, comme celui de l'interlocuteur) qui pousse à la prononcer ! Si vous êtes mathématicien je suis sûr que, comme moi, vous avez souvent l'occasion de l'entendre, ou éprouvez souvent l'envie de la prononcer ; et presque toujours sur un ton passionné ! Pourquoi cette passion ? A-t-on jamais entendu quelqu'un s'exclamer avec véhémence "ça n'est pas de la géographie" ? ou bien "ça n'est pas de la gymnastique" [2] ? Alors pourquoi *les maths* ? Sont-elles à ce point fragiles qu'elles demandent sans cesse à être protégées contre "ce qui n'est pas des maths" ?

Je me contente de poser la question, n'attendez pas de moi que je tente d'y répondre ! Un "koan" n'est pas un sujet de dissertation philosophique, c'est un outil d'interrogation permanente qui nous est proposé *à titre personnel*, et il ne tient qu'à nous de lui faire jouer un rôle dans notre vie, ou de l'ignorer si décidément il ne nous inspire pas. Je voudrais, quant à moi, vous raconter quel rôle le koan "ça n'est pas des maths, car il faut réfléchir" joue depuis quelques années dans ma vie de mathématicien. Mais je dois faire commencer mon histoire de nombreuses années plus tôt.

2. — Les dessins, est-ce que "c'est des maths" ?

Mes professeurs de maths au lycée m'ont insufflé l'amour de la géométrie, et pour les écoliers de ma génération la géométrie c'était avant tout des *dessins*. Nos profs de maths étaient d'ailleurs très fiers de leur "coup de patte" de dessinateur (savoir tracer à main levée un cercle bien rond, etc.). Je me souviens de notre réaction unanime à une réflexion de notre prof de philo, en maths élém : arrivant en classe juste après un cours de maths, et voyant le tableau couvert de magnifiques "strophoïdes" et autres courbes algébriques, il s'écrie : "Comment pouvez-vous vous intéresser à des choses pareilles !"

1 Les koan (transcription japonaise du chinois kong an, en viêtnamien công án) sont l'un des moyens privilégiés utilisés par les maîtres zen pour éveiller leurs disciples à une vraie compréhension. Il s'agit d'un court aphorisme, à effet déstabilisant sur l'esprit. S'il est bien adapté à la personnalité du disciple, un koan peut le nourrir spirituellement toute sa vie.

2 Mais Marc Legrand m'a signalé qu'il a souvent entendu des didacticiens s'exclamer avec véhémence : "ça n'est pas de la didactique !"

— "Mais c'est beau, M'sieur !", nous écrions-nous tous en chœur !

J'ai connu plus tard une époque où les mathématiciens se forçaient à ne pas dessiner, considérant leur envie de dessiner comme un enfantillage répréhensible : assistant à un cours de géométrie algébrique en Sorbonne, j'ai vu avec un immense amusement Claude Chevalley, perdant le fil de son discours, se mettre à griffonner un minuscule dessin dans le coin inférieur droit du tableau, tout en effaçant d'une main ce qu'il dessinait de l'autre !

Cette époque est aujourd'hui révolue ? Voire ! Il est vrai qu'aujourd'hui les mathématiciens n'ont plus honte de faire des dessins. Ils encouragent même leurs étudiants à en faire. Mais curieusement, ceux-ci montrent peu d'empressement à suivre le bon exemple : "on a beau leur dire, ils s'obstinent à ne pas faire de dessins". S'est-on jamais demandé pourquoi ?

Une expression familière me revient en mémoire, souvent entendue dans mon enfance, dans la bouche d'une aïeule agacée que ses paroles ne soient pas suivies d'effet : "on leur dit ça, c'est comme si on chantait !". Et si au lieu d'illustrer nos démonstrations par des dessins, nous essayions de les agrémenter par des chansons ? J'ai l'air de plaisanter, mais vous-êtes vous déjà interrogés sur le statut *réel* des dessins dans notre enseignement ? Vous arrive-t-il souvent de tenir un discours *où les dessins jouent un rôle clef*, c'est-à-dire qu'en supprimer les dessins lui ferait perdre toute cohérence ? Vous arrive-t-il parfois de proposer un exercice *dont la donnée est un dessin* ? A propos d'une notion comme celle de *produit scalaire*, vous arrive-t-il de faire travailler les étudiants sur *le produit scalaire* de la géométrie du lycée, celui qui se mesure avec la règle et l'équerre ? [3]

Non bien sûr ! Si les mathématiciens d'aujourd'hui font des dessins, ce n'est pas avec la règle et l'équerre, ce n'est d'ailleurs même pas sur du papier, ni au tableau (ni sur un écran d'ordinateur), comme pourrait le croire un observateur naïf qui se fie à ce qu'il voit ! Non, ils font des dessins *dans* $\mathbf{R}^2$ — disent-ils !

Curieuse incantation ! Grâce à son pouvoir magique, le seul fait de poser la pointe du crayon sur la feuille de papier (ou le bout de la craie sur le tableau noir) est censé faire jaillir un couple de nombres ! On me dira peut-être que c'est effectivement ce qui se passe dans un ordinateur quand on "clique" avec la souris en un point de l'écran. Et alors ? Il est certain que Descartes nous a donné un bel outil technique lorsqu'il a proposé de repérer les points du plan par le couple de leurs "coordonnées". Mais que penserait-on d'un maçon qui, ayant construit un échafaudage pour restaurer une façade, ne saurait parler de celle-ci qu'en se référant aux numéros des éléments de son échafaudage ? Je garde en mémoire, comme un legs précieux, cette maxime que mon "prof de taupe [4] " nous répétait inlassablement :

"Au commencement n'étaient pas les axes !"

C'est le désir de transmettre ce legs qui a inspiré une bonne partie de mes efforts d'enseignant — avec le sentiment inconfortable de me trouver ainsi en constant porte-à-faux

3 Tout ce passage est extrait de mon article [Ph2], écrit à l'intention des collègues mathématiciens de l'enseignement supérieur.

4 M. Bastien, au Lycée Saint Louis à Paris.

avec l'esprit des programmes de maths "modernes" — ces programmes qui conduisent à ne parler de la "maison géométrie" qu'en termes d'échafaudage !

"Au commencement était le nombre...",

tel est le *credo mathématique* du vingtième siècle. A partir des *nombres entiers*, ce "don de Dieu" (nous dit Kronecker), l'homme a créé les *nombres rationnels*, puis les *nombres réels*... et les cours de maths à l'université peuvent commencer ! Quelle place y tient la géométrie ? Elle reste présente par son langage : l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels porte le nom de "droite réelle"; on appelle "plan" l'ensemble $\mathbf{R}^2$, "produit cartésien" de $\mathbf{R}$ par lui-même (merci, Descartes !)... Mais suffit-il d'utiliser le langage de la géométrie pour en transmettre l'esprit ? Descartes a introduit les "coordonnées" pour *traduire les problèmes de géométrie en problèmes de calcul*. Mais si "le plan c'est $\mathbf{R}^2$ " il n'y a plus rien à traduire ! Dès le départ, tout n'est que calcul !

Qu'est-ce donc que "le plan"? — me dira-t-on ?

Est-il vraiment nécessaire de répondre à cette question pour *faire de la géométrie plane* ? Les lycéens ne font-ils pas de la géométrie plane ? Et ne sont-ils pas initiés, *via* leur pratique de la géométrie plane, aux "règles du calcul vectoriel", ces règles qu'un jour (après quelques années d'université) ils reconnaîtront peut-être sous le nom savant d'"axiomes des espaces affines" ?

J'entends immédiatement les collègues universitaires se récrier : la façon dont on travaille au lycée sur les "vecteurs", *ces flèches que l'on dessine*, "ça n'est pas des maths" ! En écrivant ici à nouveau la "phrase magique", je ne fais que reproduire mot pour mot l'annonce solennelle d'un collègue lors de son amphi de présentation des enseignements de mathématiques, devant un grand amphi d'étudiants dont c'était le premier contact avec l'université :

" Ce que vous avez fait au lycée, ça n'est pas des maths ! Maintenant vous allez commencer à faire des maths !"

Cette annonce m'avait beaucoup choqué sur le moment. Aujourd'hui, avec le recul, je lui trouve un immense mérite : elle exprime très franchement une idéologie qui imprègne fortement l'esprit de chacun d'entre nous, mathématiciens universitaires, souvent à notre insu ! J'en ai fait l'expérience douloureuse en 96-97, année où j'avais pris la responsabilité d'un cours d'algèbre linéaire en première année d'université. En préparant la rentrée, j'étais tombé sur un vieux livre russe qui m'avait beaucoup plu.

C'était, je crois, un de ces livres datant de l'époque où l'URSS, ruinée par la guerre, essayait de reconstruire son tissu scientifique en confiant la formation de ses jeunes ingénieurs à ses meilleurs savants. Ce livre-là (j'ai malheureusement oublié le nom de son auteur) partait de problèmes concrets relevant de ce qu'on appelle la *programmation linéaire*, et les traitait de façon à la fois très pragmatique et très intuitive, utilisant un langage très géométrique. Résolu à m'en inspirer, j'aurais sans doute mieux fait de le suivre sans y mettre mon grain de sel ! Car, soucieux d'apporter un peu de "précision française" au "flou artistique" russe [5], et cher-

5 Le livre en question évoquait en termes assez vagues des "espaces à n dimensions", généralisations du plan et de l'espace des géométries bidimensionnelles et tridimensionnelles usuelles.

chant d'abord simplement à expliciter un "dictionnaire" traduisant en langage géométrique les formules apparaissant en programmation linéaire, ne voilà-t-il pas que je découvre que je disposais-là d'une *définition axiomatique* des espaces affines, permettant d'introduire la notion de *système de coordonnées cartésiennes* beaucoup plus directement que la définition usuelle [6].

Las ! Cette expérience d'enseignement a été une catastrophe, la plus catastrophique de toute ma carrière ! Les avions en papier volaient dans l'amphi ! Certains étudiants venaient me faire part de leurs inquiétudes : pourquoi nous faites-vous des cours si abstraits ? pourquoi ne faites-vous pas un enseignement d'algèbre "normal" — groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels (ah bon ? "groupes, anneaux, corps", ce n'est pas abstrait ?).

Cet échec m'a beaucoup fait réfléchir. Ma nouvelle approche des espaces affines était un beau jouet, dont la séduction m'avait aveuglé. Il est vrai qu'elle conduisait plus directement à la notion de *système de coordonnées cartésiennes* ; mais elle reposait sur *la notion abstraite de fonction*, fort éloignée de l'idée naïve qu'un lycéen se fait d'une fonction (plus ou moins identifiée dans son esprit à une formule, ou parfois au dessin d'une courbe !). De toutes façons elle s'inscrivait — comme l'approche traditionnelle — dans une démarche axiomatique, et la démarche axiomatique est pour un débutant une démarche très sophistiquée, d'autant plus sophistiquée qu'elle porte sur des objets "concrets", que l'on croit bien connaître : parmi toutes les propriétés dont on "sait" par expérience qu'elles sont vraies, pourquoi en sélectionner quelques-unes que l'on élèvera au rang d'"axiomes", et s'imposer la discipline aride d'en "déduire" les autres propriétés ? et pourquoi s'imposer d'*oublier* des notions dont nous avons acquis l'intuition en manipulant des instruments de dessin comme l'équerre et le compas ? Drôle de géométrie que cette "géométrie affine" où n'existe ni notion de longueur ni notion d'orthogonalité !

Pour le même enseignement d'algèbre l'année suivante, j'ai décidé de changer de stratégie, sans pour autant renoncer au "legs précieux" de mon prof de taupe. La première leçon a porté sur les espaces vectoriels [7]. Mais ceux-ci n'étaient présentés que comme le *cadre* dans lequel allait se dérouler notre travail [8], et non pas comme sujet d'étude principal : les seuls exemples d'espaces vectoriels que j'ai présentés, et dans lesquels nous avons travaillé, étaient $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$,… $\mathbf{R}^n$ (ensembles des couples, triplets,… , n-uplets de nombres réels) — ce qui bien sûr n'a rien d'original — et *l'espace des vecteurs de la géométrie du lycée*, cette géométrie qui "n'est pas des maths". Cette fois les étudiants ont réagi très positivement à mon enseignement, qui d'une part ressemblait à un enseignement "normal" d'algèbre linéaire (ou à l'idée qu'ils s'en faisaient d'après la "rumeur publique") et d'autre part s'appuyait fortement sur des notions géométriques qu'ils avaient travaillées au lycée [9].

6 Contrairement à la définition usuelle des espaces affines (basée sur le concept de vecteur), mes "espaces affines" étaient caractérisés par la donnée d'un ensemble de fonctions appelées "fonctions affines", obéissant à une liste de propriétés prises comme axiomes. Les géomètres algébristes reconnaîtront une démarche qui leur est familière (définir une variété algébrique en posant les axiomes que doivent vérifier les "fonctions rationnelles").

7 sur le corps **R** des nombres réels, de façon à court-circuiter la litanie "groupes, anneaux, corps".

8 travail consistant à combiner linéairement des vecteurs, à s'interroger sur des problèmes de dépendance linéaire, etc.

9 Pour une analyse détaillée de cette expérience d'enseignement, cf. [Ph1].

Au fond, rien que de très naturel dans cette approche. Il suffisait d'oser briser un tabou universitaire ! Qu'il m'ait fallu passer par une expérience catastrophique pour en arriver là montre à quel point ce tabou était solidement installé dans mon esprit !

Vladimir Arnold, ce grand pourfendeur de l'idéologie "bourbakiste [10]", m'a raconté récemment une anecdote qui m'a beaucoup amusé, et que je tente ici de reproduire de mémoire.

Lors d'une séance solennelle de l'Académie des Sciences de Russie (à laquelle assistait le président Poutine en personne !), Arnold avait été invité à parler des mathématiques. Avec son goût coutumier de la provocation, il a annoncé qu'il avait trouvé une contradiction entre des écrits de Jean-Pierre Serre d'une part, David Hilbert d'autre part : une contradiction entre l'un des membres éminents du mouvement français "Bourbaki", et le grand mathématicien allemand dont la pensée a été la source fondatrice de ce mouvement ! David Hilbert a — paraît-il — écrit quelque part que "la physique c'est de la géométrie". Jean-Pierre Serre, quant à lui, a écrit quelque part que "contrairement à ce que l'on prétend souvent, la physique et les mathématiques sont deux disciplines qui n'ont aucun rapport entre elles" !

A la même séance de l'Académie des Sciences le mathématicien "Untel" (Arnold m'a dit son nom, mais je l'ai oublié), prenant la parole après Arnold, a ironisé sur la prétendue "contradiction" qu'Arnold avait vue entre ces deux déclarations. "Je m'étonne qu'Arnold maîtrise si mal les règles de la logique d'Aristote" — a-t-il dit. "Ces deux phrases ne sont en rien contradictoires ! Mais quiconque a des notions élémentaires de logique en tire immédiatement la conclusion suivante :

la géométrie et les maths
sont deux disciplines qui n'ont
aucun rapport entre elles ! "

Le plus fort dans cette histoire — me disait Arnold —, c'est que "Untel" ne plaisantait pas en concluant ainsi : il milite pour qu'on supprime la géométrie des programmes de mathématiques du lycée !

J'ai dit à Arnold qu'en ce qui me concerne je ne vois aucun inconvénient à souscrire à la conclusion d'"Untel" :

"la géométrie, ça n'est pas des maths !"

Mais pour moi ce n'est pas une raison pour supprimer la géométrie des programmes de mathématiques, *au contraire* ! Car que resterait-il d'intéressant dans les mathématiques si l'on en supprimait tout ce qui "n'est pas des maths" ? Et parmi tout ce qui, "n'étant pas des maths", a inspiré des générations de mathématiciens, la géométrie n'est-elle pas une source d'inspiration privilégiée ?

Mais ce n'est pas seulement en géométrie que se pose le problème du *statut mathématique du dessin*. Ce problème m'est apparu sous un jour nouveau vers la fin des années 90, lorsque dans mes enseignement de calcul différentiel je me suis mis à utiliser systématiquement des dessins que je programmais sur ordinateur. Un mathématicien qui dessine une figure "à la main" dessine l'idée qu'il se fait de cette figure, il "triche" au besoin pour que le dessin soit conforme à cette idée. L'ordi-

10 Il y aurait beaucoup à dire sur les liens entre le "Bourbaki historique" (ce collectif de mathématiciens né à Nancago vers 1940) et le "Bourbaki vivant" — celui qui aujourd'hui encore vit dans notre conscience collective (et notre inconscient collectif) de mathématiciens !

nateur, lui, *n'a pas d'idée* ! Il fait "bêtement" ce qu'on lui demande de faire, et le résultat peut surprendre le mathématicien [11], tout comme le résultat d'une expérience de physique peut surprendre le physicien et l'amener à réviser ses théories. Un dessin sur ordinateur est ainsi une *véritable expérience*, et non plus une "expérience en pensée" (*gedanken experiment*) comme le sont la plupart du temps les "dessins à la main" des mathématiciens. Il m'est donc venu l'envie d'utiliser l'ordinateur pour enseigner les mathématiques à la façon dont on enseigne parfois la physique : non pas de façon déductive en partant de la théorie, mais de façon inductive, en montrant aux étudiants quelques expériences cruciales soigneusement sélectionnées [12]. En mettant au point mes "expériences cruciales", j'ai cherché d'instinct à ce qu'elles remplissent trois critères [13] :

1. L'expérience doit refléter fidèlement (aux yeux d'un mathématicien) une idée mathématique importante.
2. Sa description doit être facilement compréhensible par quelqu'un ne connaissant que très peu de mathématiques (et en tous cas pas l'idée mathématique que l'expérience est censée refléter).
3. A la description de l'expérience sont jointes des questions, elles aussi facilement compréhensibles, destinées à susciter une réflexion approfondie sur l'expérience. Cette réflexion doit pouvoir être menée en partie sans outils mathématiques sophistiqués. Mais elle doit se heurter à des obstacles suffisamment importants pour faire apprécier après coup le gain de compréhension (ou d'efficacité opératoire) apporté par les concepts mathématiques que l'expérience est censée refléter.

Je n'ai pas eu trop de mal à réaliser les critères 1 et 2 : les collègues à qui je montrais mes expériences voyaient immédiatement quelles idées mathématiques j'avais derrière la tête (critère 1), et appréciaient la simplicité du texte accompagnant l'expérience (critère 2), simplicité qui frappait également les étudiants, peu habitués à rencontrer si peu de mots savants dans un texte fourni par un prof de maths.

Mais le critère 3 m'a donné (et me donne encore) beaucoup plus de mal, et les réactions des étudiants à mes expériences ont été et sont encore pour moi une source inépuisable de surprises. Souvent ils se contentent d'une réflexion très superficielle, ne débouchant sur rien qu'on puisse qualifier de mathématique ; parfois ils vont chercher bizarrement des outils mathématiques manifestement

11 Par exemple le graphe d'une fonction exponentielle, dessiné à l'ordinateur, apparaît souvent comme en partie confondu avec l'axe des abscisses, alors que le mathématicien sait bien "qu'en réalité" la fonction exponentielle ne s'annule jamais. Bien sûr cet exemple très simple ne surprendra que les "mathématiciens en herbe" que sont certains étudiants. Mais cette surprise n'est-elle pas de même nature que celle qu'ont eue les mathématiciens la première fois qu'ils ont regardé sur leur écran d'ordinateur des courbes intégrales d'équations différentielles, et constaté que les courbes semblaient prendre un malin plaisir à contredire le théorème bien connu qui leur enjoint de rester bien séparées les unes des autres ? (on trouvera beaucoup de tels dessins dans le joli livre de John Hubbard et Beverly West, Equations différentielles et systèmes dynamiques [HW]).

12 L'organisation des enseignements ne m'a que rarement permis de faire réaliser les expériences par les étudiants eux-mêmes. Je me suis donc contenté de les réaliser moi-même, et de leur en communiquer le résultat sur papier, avec des questions pour susciter leur réflexion.

13 Je dis "d'instinct" car avant d'écrire cet article je n'avais jamais cherché à formuler explicitement ces critères.

inadaptés au problème. Je me suis surpris un jour en train de me faire in petto la réflexion suivante :

> "Décidément nos étudiants
> ont une étonnante capacité
> de *non-conceptualisation* !"

Belle manifestation d'impatience, de la même eau que le "Vous le faites exprès de ne pas comprendre !" que les enseignants se laissent parfois aller à dire (ou à penser) ! Bien sûr je n'avais jamais eu l'idée folle que mes expériences puissent faire *découvrir* aux étudiants des concepts que les mathématiciens ont mis des siècles à découvrir. Mais j'espérais quand-même qu'ils sauraient reconnaître des concepts sur lesquels ils avaient déjà beaucoup travaillé. Par exemple lors d'un enseignement de calcul différentiel en licence, j'ai été surpris que presque aucun étudiant n'utilise le concept de *dérivée* à propos d'une expérience montrant un graphe de fonction vu de très près, de tellement près que ce graphe apparaissait comme une droite. J'avais mis longtemps à "peaufiner" le court texte de questions accompagnant cette expérience, un collègue à qui je l'avais montré m'avait dit l'aimer beaucoup, et m'avait fait un commentaire circonstancié sur les concepts mathématiques importants qu'il y voyait.

Pourquoi les étudiants, censés pourtant connaître ces concepts-là, ne les voyaient-ils pas ? J'ai mis un certain temps à trouver la réponse évidente : *s'ils ne les voyaient pas, c'est parce que les concepts n'y étaient pas !* C'est notre esprit de mathématicien (le mien, celui de mon collègue) qui *mettait des concepts dans cette expérience !*

Mais que penser des bizarres tentatives de conceptualisation que j'ai souvent observées chez mes étudiants ? Une remarque que m'a faite Marc Legrand m'a beaucoup aidé à y voir ma part de responsabilité. J'aime beaucoup les idées et les pratiques enseignantes de Marc Legrand, et notamment l'idée de mettre les étudiants dans des situations *ouvertes*, où ils peuvent se sentir libres d'exercer leur intelligence sans se demander sans cesse si la tournure que prend leur réflexion correspond bien à ce que "le prof attend d'eux". Tu as une curieuse façon — m'a dit en substance Marc Legrand — de proposer aux étudiants des situations apparemment ouvertes, mais que tu "fermes" de façon très subtile, par un mot ou une indication apparemment anodine mais que l'étudiant ne peut manquer de remarquer, se demandant : "quelle perche veut-il donc là que je saisisse ?"

Et en relisant mes textes j'ai effectivement vu ces "perches tendues", et en regardant mes étudiants travailler j'ai effectivement vu comment ils les cherchaient dans mes textes, et comment cela les mettait parfois sur des voies qu'aucun être sensé n'aurait prise de sa propre initiative ! Et pourquoi ces "perches tendues"? Simplement par peur, ma peur que les étudiants ne sachent pas trouver seuls le chemin ! J'ai alors travaillé à épurer mes textes, et l'ampleur de la tâche m'a montré à quel point ils étaient encore loin de l'idéal de simplicité que je m'étais fixé, pollués qu'ils étaient par mon désir que les étudiants trouvent "la bonne voie" (la mienne !).

J'ai aussi vu un autre défaut de mes textes, qui pouvait expliquer cette tendance de mes étudiants à "conceptualiser à tout prix et n'importe comment". Malgré tous mes efforts, mes questions posées à propos de situations "concrètes" sortaient trop souvent du registre de ce "concret" relevant du seul "bon sens" (mauvais respect de mon "critère 3", selon lequel les mathématiques devraient pouvoir être provisoirement mises de côté) : toujours cette déformation professionnelle de mathématicien, tellement habitué à sauter d'un registre à l'autre qu'il saute sans même s'en rendre compte, s'étonnant ensuite que les étudiants ne le suivent pas ("ça n'est pourtant qu'une question de bon sens !") ! J'ai donc essayé de ré-écrire les passages de mes textes où je "mélangeais trop les registres". On trouvera ci-après, en annexe, un exemple de ce travail de ré-écriture : bien que prétendant ne parler que de géographie (lecture des lignes de niveau sur une carte), le paragraphe 1 de ma séquence "Lignes de niveau des fonctions de deux variables" [14] était primitivement, dans sa partie 1.1, rédigé comme un exercice de maths, avec des termes techniques comme "restriction", "extrema locaux", "sens de variation"... La version finale du même paragraphe 1, quant à elle, est complètement vidée de tout contenu mathématique explicite. D'elle on peut dire vraiment

Ça n'est pas des maths !

Mais — direz-vous — le but est quand même de faire maîtriser aux étudiants des concepts mathématiques ? Comment les étudiants apprendront-ils à faire le saut (car c'en est un !) du "registre du bon sens" au "registre mathématique" (comme demandé au §1.1 de l'exemple cité) ? Immense problème, qui traversera tout cet article ! Mais dissipons immédiatement toute équivoque : je n'ai aucune recette miracle, et c'est justement ce qui fait pour moi de l'enseignement une aventure passionnante, une quête jamais terminée. Et je suis profondément convaincu qu'il n'existe pas de recette miracle, si du moins on entend "maîtriser les concepts" au plein sens du mot "maîtriser" : non pas la "maîtrise" mécanique que peut avoir un ordinateur, mais celle de l'être humain qui *comprend*.

Grand mystère que celui de la "compréhension" !

"Je vois" — dit-on couramment pour signifier qu'on a compris. Quoi de plus naturel, donc, que de chercher à communiquer par *dessins* ? N'avez-vous pas constaté que demander à un étudiant de faire un dessin, ou de répondre à une question simple sur un dessin, peut être un excellent moyen de tester s'il a *vraiment* compris ?

Mais que *voit*-on dans un dessin ? Comment s'assurer que l'autre y *voit* la même chose que nous ?...

1. — Les mathématiciens savent-ils de quoi ils parlent ?

Je discute souvent d'enseignement avec mon collègue A.H. Nos points de vue, la plupart du temps, sont diamétralement opposés, et je crois que notre plaisir à discuter ensemble vient d'une sorte de fascination réciproque, la fascination devant l'incompréhensible : "comment un être de raison peut-il avoir des vues aussi éloignées des miennes ?!"

A la rentrée 1997-98 (juste après la désastreuse expérience pédagogique dont j'ai parlé précédemment), A.H. s'est porté volontaire pour

14 La première version est présentée et analysée dans un travail de Maryse Maurel et Catherine Sackur présenté à des journées de didactique [MS]. La version finale est dans mon livre [Ph3], à la rubrique DVI 7.

participer à mon équipe pédagogique en première année d'université. Expérience mémorable que cette collaboration ! Chaque semaine il m'envoyait des messages électroniques incendiaires, "descendant en flammes" mes projets de polycopiés (qu'il lisait avec une grande attention !). Beaucoup de ses critiques, portant sur la *forme* de mes textes, m'ont aidé à mieux les structurer, à les rendre plus clairs. D'autres, portant sur le *fond*, m'ont été utiles d'une autre façon : par l'abîme qu'elles révélaient entre nos façons de voir, elles m'ont aidé à prendre conscience de mes motivations les plus profondes.

J'ai reçu un jour de lui le message suivant (que je reproduis de mémoire) :

> J'ai encore piqué une colère à propos de ta "géométrie du lycée" ! Pourquoi ces références constantes au "plan du lycée", aux "vecteurs du lycée", qu'est-ce que c'est que ces exercices dont l'énoncé est un dessin, tu les infantilises avec ça, tu leur donnes une fausse idée des mathématiques, *les mathématiques s'intéressent à des abstractions !...*

L'abstraction !... Ce mot revient souvent dans la bouche ou sous la plume de nos étudiants, avec une variété d'acceptions que je trouve fascinante.

"Vos exercices sont trop abstraits" — m'ont dit un jour mes étudiants de la filière SPI (Sciences pour l'ingénieur).

— "Abstraits, mes exercices ?" — me suis-je étonné. "Alors qu'il n'y est question que de phénomènes concrets : désintégration d'atomes radioactifs, oscillations de pendules, etc. ! Qu'appelez-vous donc des exercices concrets ?"

— "*Eh bien* — me dirent-ils — *ce sont des exercices où il y a des formules* !"

Pas si bête, après tout ! Ils auraient aimé que je leur demande seulement de "bidouiller des formules", activité tout aussi "concrète" que bidouiller les boutons d'un appareil ! Et Hilbert lui-même n'a-t-il pas dit que les "objets concrets" du mathématicien sont les signes qu'il manipule [15] ?

Alors, "abstrait", "concret", ces mots ont-ils un sens ?

Je conserve en mémoire, comme un souvenir précieux, cette réflexion de notre professeur Heisuke Hironaka lors d'une école d'été en Finlande en 1968 [16] :

> "On ne peut faire des maths qu'en réfléchissant à des exemples. Mais ce qu'est un exemple varie beaucoup d'un mathématicien à l'autre : pour moi, un exemple, c'est un exemple d'équation algébrique ; pour Eilenberg, un exemple, c'est un exemple de catégorie !"

La notion de *catégorie* a la réputation d'être très abstraite. Pourtant la définition d'une catégorie est encore plus simple que celle d'un groupe. Pourquoi donc ne pas enseigner les catégories en première année d'université ? Serait-ce moins raisonnable que d'enseigner "Groupes, Anneaux, Corps"? Tant qu'il ne s'agit que d'entraîner

15 Je fais notamment allusion à un passage, cité dans un intéressant article de Rudolph Bkouche [Bk], d'une conférence prononcée par Hilbert en 1927.

16 Il s'agissait d'une école quasi-confidentielle organisée par le Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, alors dans l'enfance. L'assistance consistait en une dizaine de chercheurs débutants : Bernard Teissier, Lê Dung Trang, etc.

les étudiants à un petit jeu gratuit, un “bidouillage de formules”, c'est parfaitement faisable ! “Bidouiller des catégories”, c'est concret, tout comme bidouiller des “groupes, anneaux, corps” ! Ne dira le contraire que celui qui n'accepte pas la gratuité de ce petit jeu, celui qui réclame qu'on lui dise “à quoi ça sert” ! Pour lui répondre, il faudra l'inviter à parcourir un long *chemin d'abstraction* (le chemin qui mène de l'algèbre élémentaire du lycée à l'algèbre universitaire, puis de celle-ci à la théorie des catégories).

Je ne crois pas que “l'abstraction” soit un *état*, c'est-à-dire qu'il existe des “choses” qu'on puisse (hors de tout contexte) qualifier d'“abstraites” et d'autres qu'on puisse qualifier de “concrètes”. Je crois plutôt que l'abstraction est un *processus de transformation* :

“faire abstraction de...”

Remarquez les points de suspension, place vide à remplir... A remplir par quoi ? Par ce qu'on appellera, *par convention*, “le concret”. L'adjectif “concret”, comme l'adjectif “abstrait”, est *en lui-même* vide de sens, ce n'est qu'une désignation conventionnelle permettant de distinguer les deux “bouts” d'un *processus d'abstraction* :

“concret” $\xrightarrow{\text{processus d'abstraction}}$ “abstrait”

Croyez-vous pouvoir isoler l'un des bouts d'un bâton ? Certes, vous pouvez toujours demander à quelqu'un de regarder l'un des bouts du bâton, ou même de saisir le bâton “par ce bout-là”, mais jamais vous ne pourrez lui donner un bâton qui n'ait qu'un seul bout !

C'est pourquoi je n'aime pas l'affirmation d'A.H. : “les mathématiques s'intéressent à des abstractions”. Je trouve plus juste de dire :

“la démarche mathématique est une démarche d'abstraction”.

Mais on ne peut abstraire que du concret[17] ! *On ne peut “faire des maths” qu'avec des non-maths*[18] !

Ne vous méprenez pas ! Je ne prétends pas qu'on ne puisse “faire des maths” qu'en partant de phénomènes du monde physique, ou de problèmes technologiques, etc. (ce qu'on appelle conventionnellement “faire des mathématiques appliquées”) ! Non, le domaine des “non-maths” est bien plus vaste, on peut le trouver *au sein même des mathématiques les plus “pures”*. Prenez par exemple la notion de polynôme. Tout mathématicien vous dira qu'il s'agit d'une notion mathématique importante, dont vous pourrez trouver la définition dans n'importe quel manuel. Mais regardons-y d'un peu plus près. Un collégien ou lycéen qui fait des calculs littéraux (où des nombres inconnus sont représentés par des lettres x, y,...) manipule des polynômes sans le savoir (comme Monsieur Jourdain faisait de la prose), il n'a que faire de la notion de polynôme. L'utilité de cette notion ne pourra lui apparaître que si, non content de *faire* de tels calculs, il veut *réfléchir à ce qu'il fait*, s'extrayant de ses formules pour en faire les *objets de sa réflexion* : voilà ce qu'est, au départ, un polynôme, un certain type *d'expression littérale* (assemblage de lettres), comme : $x^2 + y^2$ ou $x^3 + xy + z$, etc.

17 C'est précisément le caractère trop “concret” de mes exercices qui mettait mes étudiants de SPI en difficulté, car ces exercices exigeaient d'eux un trop gros effort d'abstraction !

18 Didier Nordon a déjà dit cela autrement, en intitulant l'un de ses livres “Les mathématiques pures n'existent pas” [No] !

"Ça ne tient pas debout" — m'a dit A.H. à qui je faisais part de ces réflexions. "$x^2 + 2xy + y^2$, ça n'est pas la même expression que $(x+y)^2$; pour toi, est-ce ou non le même polynôme ?"

— Tu as raison, André, ce que je viens de dire des polynômes, ça n'est pas des maths ! Mais c'est quand-même bien cette façon de voir les polynômes qui les rend utiles au mathématicien, en lui permettant de tenir un discours sur les maths [19], de *dire ce qu'il fait*.

Que penser alors de la "définition mathématique" des polynômes, celle que l'on trouve dans tous les manuels de première année d'université [20] ? Pour moi, ce n'est là qu'un formatage conventionnel de la notion de polynôme, une façon ingénieuse mais artificielle de faire "rentrer dans le rang" de ce qu'on a convenu d'appeler "mathématiques" ce produit "non mathématique" de notre réflexion [21]. La clef de cette modélisation mathématique consiste à ne voir dans un polynôme (ré-écrit sous forme standardisée) que la collection de ses coefficients, *faisant abstraction de tout le reste* : et "tout le reste", c'est tout ce qui faisait qu'un polynôme "ça n'était pas des maths" — tout ce qui faisait le sens de la notion de polynôme !

Un mathématicien est quelqu'un
qui ne sait pas de quoi il parle, ...

a écrit Bertrand Russell. Phrase merveilleuse, mais qui décrit un mathématicien quelque peu idéalisé ! En réalité, les mathématiciens sont des gens comme tout le monde, qui comme tout le monde aiment savoir de quoi ils parlent [22]. Mais il est vrai qu'une part essentielle de leur activité mentale consiste à "faire comme s'ils ne savaient pas", *et c'est en cela que consiste la démarche d'abstraction*.

Démarche difficile ! D'après le bon sens populaire, un mathématicien est "quelqu'un qui calcule avec des x". Je trouve cette observation plus profonde qu'elle n'en a l'air. Car, comme le suggère Bertrand Russell, faire des mathématiques c'est avoir le culot de "faire quelque chose" (calculer, raisonner) avec des objets en ignorant délibérément de quels objets il s'agit. Cette démarche ne va pas de soi, elle coûte un gros effort, et j'ai l'impression que beaucoup de nos déboires d'enseignants viennent de ce que nous n'avons pas suffisamment conscience de la difficulté de cet effort.

Par exemple, nous nous étonnons souvent des difficultés qu'ont nos étudiants à

19 Selon un usage devenu à la mode au vingtième siècle, on dit d'un tel discours qu'il est "méta-mathématique". Cette insistance à distinguer deux types de discours ("mathématique" vs. "méta-mathématique") est révélatrice de la volonté des mathématiciens du vingtième siècle de formater le discours mathématique selon des règles canoniquement codifiées.

20 Définition : on appelle polynôme (à une indéterminée) une suite infinie de nombres (a_0, a_1, a_2,...) tous nuls au delà d'un certain rang (appelé degré du polynôme)". En général les manuels de première année ne définissent que les polynômes à une seule indéterminée, car dans le cas de plusieurs indéterminées ce serait trop compliqué !

21 Les mots "équation", "inconnue", "paramètre" sont d'autres exemples importants de mots servant au mathématicien à dire ce qu'il fait. A la différence du mot "polynôme", les mathématiciens n'ont pas tenté de les faire "rentrer dans le rang". On pourrait donc dire aussi que les "équations", les "inconnues", les "paramètres", "ça n'est pas des maths" !

22 Mais "savoir de quoi on parle" n'a pas toujours pour eux le même sens que pour tout le monde ! Par exemple ils reprocheront à la géométrie du lycée de parler d'objets (par exemple "le plan") qui n'ont pas été "définis" — au sens technique qu'a pour eux le mot "définition". Mais un lycéen à qui on parle du "plan" a la conviction de savoir de quoi il s'agit !

maîtriser les notions logiques d'"implication", "équivalence", etc. "C'est pourtant simple, la logique ça n'est qu'une question de bon sens" — disent beaucoup de collègues. Mais est-il si sûr que le "bon sens mathématique" fonctionne comme celui de la vie de tous les jours ? Dans la vie de tous les jours, avons-nous si souvent l'occasion de considérer une propriété comme vraie puis d'oublier délibérément qu'elle l'est ? Nos progrès dans la compréhension d'un sujet ne procèdent-ils pas le plus souvent par accumulation de savoirs sur des objets bien déterminés : on sait de quoi on parle, et faire progresser notre connaissance c'est savoir de plus en plus de choses sur l'objet dont on parle ?

A l'opposé, le mathématicien "ne sait pas de quoi il parle", son discours est truffé de "variables". Impossible donc d'affirmer que ce qu'il dit est vrai, ça dépend[23] ! C'est ce que nous dit Bertrand Russell (dont je cite maintenant la phrase dans son intégralité) :

Un mathématicien est quelqu'un
qui ne sait pas de quoi il parle,
ni si ce qu'il dit est vrai !

Si l'on ne voit là qu'une boutade destinée à étonner les profanes, on passe à côté de l'essentiel : cette phrase merveilleuse nous est offerte, *à nous mathématiciens*, comme sujet de méditation permanent pour *éclairer notre pratique quotidienne*.

Ce qui m'amuse c'est que les mathématiciens, qui travaillent sans cesse "sans savoir de quoi ils parlent ni si ce qu'ils disent est vrai", insistent rarement sur l'importance stratégique de *l'oubli des savoirs* dans les progrès de leur discipline. S. Abhyankar a fait figure de provocateur le jour où il a dit, pour expliquer le tour pris par ses recherches en géométrie algébrique[24] :

mon secret, c'est d'oublier l'algèbre
universitaire pour revenir
à l'algèbre du lycée !

Peut-être pensez-vous que seul un génie peut se permettre ce genre de provocation ? Je crois au contraire que même au niveau le plus élémentaire on ne peut faire de progrès en mathématiques qu'à condition de s'offrir assez régulièrement une "purge" d'oubli des savoirs.

Voici ce qu'écrit une étudiante de première année[25], à propos d'un double exercice où je leur demandais d'abord d'illustrer graphiquement la discussion des solutions de l'équation générale du second degré, puis de "discuter de même les solutions de l'équation $x^3 + ux + 1/4 = 0$" :

> "Tout d'abord nous avons travaillé sur un sujet bien connu : les racines réelles d'une équation du second degré. Mais il fallait trouver ces racines graphiquement. Cet exercice, qui m'avait semblé simple au premier abord, m'a en fait posé plusieurs difficultés. En effet je connaissais déjà la réponse théorique : (...). Et je ne parvenais pas à me "détacher" de ce résultat pour retrouver un raisonnement logique, qui devait pouvoir par la suite servir pour trouver le nombre de racines d'une autre équation polynomiale telle que $x^3 + ux + 1/4 = 0$. (...)

23 Ça dépend des valeurs des variables (cf., dans la thèse de Viviane Durand Guerrier, la notion d'énoncé contingent). J'ai intitulé "Ça dépend" l'Intermède de mon livre "Fonctions d'une ou deux variables" [Ph3].

24 Recherches sur la "résolution des singularités en caractéristique quelconque".

25 Dans son "mémoire de Raisonnement Scientifique" : cf. § 5.

Dans notre groupe de travail, nous nous sommes donc servis de la calculatrice et, (...) en essayant de tracer différentes courbes pour différentes valeurs de u, nous sommes ainsi arrivés au résultat. Mais il nous fallait un raisonnement théorique pour confirmer ces résultats. (...)"

Un autre exemple qui m'est cher est celui d'un progrès accompli dans ma recherche personnelle *grâce à l'ignorance de mes étudiants* : voulant exposer aux étudiants de 3ème cycle de l'Université de Dalat des résultats que j'avais publiés deux ans auparavant [26], je me suis heurté à leur ignorance des techniques "d'analyse microdifférentielle" sur lesquelles reposaient ces résultats ; en me creusant la tête pour essayer de me passer de ces techniques (qu'il aurait été trop long de leur exposer) j'ai réussi à reformuler mon résultat initial d'une façon plus simple et plus forte, et à en trouver une démonstration plus élémentaire [27].

Le processus d'abstraction ("faire abstraction de...") ne va donc pas toujours de l'élémentaire au sophistiqué, il peut aussi bien aller du sophistiqué à l'élémentaire. Le "bâton" que je vous ai présenté en début de paragraphe peut être retourné dans l'autre sens ! C'est pourquoi je me désole rarement du manque de connaissances de mes étudiants, il aurait plutôt tendance à me stimuler ("ils ne savent pas beaucoup de maths, donc il va falloir réfléchir !"). Ce qui me dérange bien davantage, c'est leur trop grande quantité de connaissances mal assimilées. Je les incite souvent à les "gratter", pour "faire tomber tout ce qui ne tient pas", comme on gratte les vieux "fonds de peinture" avant de repeindre un mur : quiconque a refait ses peintures sait que c'est la partie la plus délicate et la plus difficile du travail !

4.— L'esprit d'invention en mathématiques

"J'insiste à nouveau sur le fait qu'en développant l'esprit d'invention mathématique par l'enseignement, on ne contribue pas seulement à la formation d'un petit nombre de spécialistes que sont les mathématiciens, mais on rend également service à tous ceux pour lesquels les mathématiques sont seulement étudiées en vue de leur application pratique."

En contrepoint de cette profession de foi d'Emile Borel ([Bo]), voici le texte d'une punition (à copier cent fois) infligée par un professeur de lycée à la fille d'un collègue (chercheur en mathématiques).

"Les mathématiques ne s'inventent pas,
elles s'apprennent par cœur."

Cela vous fait rire ? Mais attention ! Le professeur qui a infligé cette punition n'a-t-il pas été formé à l'université ?

Beaucoup de mathématiciens ont écrit des choses très belles sur le processus d'invention en mathématiques. Mais la faculté d'invention mathématique peut-elle être développée chez tous, ou bien reste-t-elle l'apanage d'une élite — un "petit nombre de spécialistes", pour reprendre les termes d'Emile Borel ?

26 Dans "The Stokes Phenomenon and Hilbert's 16th problem", World Scientific 1996.

27 Publiée dans "Toward the exact WKB analysis of differential equations", Kyoto University Press 2000.

Mon collègue Jean-Michel Lemaire m'a raconté récemment une anecdote savoureuse : dans le cadre d'un cours optionnel pour étudiants de première année, il a posé à ses étudiants un exercice dont l'énoncé commençait par "Démontrez que...".

"Mais, M'sieur — se sont récrié les étudiants —, au lycée on ne nous a jamais *fait faire* de démonstrations ! On nous a seulement *montré* des démonstrations !"

Phrase admirable, à méditer dans l'exercice quotidien de notre métier d'enseignant, que ce soit au lycée ou à l'université ! Quand donnons-nous l'occasion à nos élèves de *faire* des mathématiques ? Ne nous contentons-nous pas trop souvent de leur *montrer* des mathématiques ?

J'aime beaucoup regarder comment mes étudiants *font* des mathématiques. J'ai parfois l'impression d'en apprendre ainsi beaucoup plus sur les maths qu'en observant ma propre démarche de chercheur. Car même après tant d'années d'expérience, j'ai souvent de grosses surprises !

Ainsi par exemple, vers 1998 j'ai proposé à mes étudiants de seconde année un travail, que je croyais facile, sur les fonctions puissances. Leur réaction m'a tellement surpris, je l'ai trouvée tellement instructive, que je me suis mis à proposer tous les ans ce travail à divers publics d'étudiants (de première ou seconde année), avec chaque fois des réactions analogues.

Il s'agissait d'apprendre à reconnaître géométriquement, à l'aide d'outils de dessin, si une représentation graphique de fonction (tracée sans indication d'échelle) pouvait être considérée comme représentant une fonction puissance. Nous nous sommes d'abord posé la question pour la fonction "puissance deux" (dont la courbe représentative $y = x^2$ est une parabole). J'ai demandé à mes étudiants de démontrer que cette courbe C vérifiait une propriété que l'on pourrait appeler "propriété du milieu" :

La tangente à C en tout point M coupe l'axe des abscisses au point milieu du segment OH, où H est le point de même abscisse que M (sur l'axe des abscisses).

Réciproquement, si une courbe C vérifie la propriété du milieu, peut-on dire qu'il s'agit du graphe de la fonction "puissance deux" ? La réponse est OUI, à multiplication par une constante près (changement d'échelle en ordonnée).

Tout cela n'a pas été sans mal, notamment pour la réciproque [28]. Quand tout cela m'a paru bien compris, à la fois théoriquement et expérimentalement (travail graphique sur des exemples...), je leur ai proposé l'exercice suivant : G*énéralisez à une fonction puissance d'exposant* α *quelconque.*

Et c'est alors que j'ai eu la grosse surprise !

"M'sieur, je n'arrive pas (nous n'arrivons pas) à démontrer que les courbes de la forme $y = x^\alpha$ vérifient la propriété du milieu. ça ne marche que pour $\alpha = 2$!"

(moi) — "C'est normal, non ? N'avons-nous pas démontré que la propriété du milieu *équivaut* à dire que la courbe est de la forme $y = ax^2$?"

28 Après s'être mis dans la tête que C était la courbe d'équation $y = x^2$, il faut maintenant oublier cela (cf. § 3 : on "ne sait plus de quoi on parle") !

— Mais, M'sieur, *généraliser*, ça veut bien dire démontrer que la même chose est vraie dans le cas plus général, non ?"

Je pensais leur avoir proposé là un exercice de simple imitation (refaire pour a quelconque le travail déjà fait pour $\alpha = 2$). Et je m'apercevais qu'en leur demandant de "généraliser" je leur demandais d'inventer : il ne s'agissait pas seulement de "démontrer" un énoncé que je leur aurais fourni ! Il fallait *deviner quoi démontrer* !

Certains étudiants se sont pris au jeu, adoptant une démarche expérimentale (traçant avec soin [29] des courbes comme $y = x^{1/2}$, $y = x^3$, etc.). Quel plaisir de voir leur excitation lorsqu'après quelques conjectures infirmées par l'expérience ils pensaient tenir enfin la bonne conjecture : "maintenant c'est bien ça, nous en sommes sûrs !" — tant était grand leur désir que "ça soit bien ça" ! Tout chercheur reconnaîtra là un sentiment maintes fois éprouvé [30] !

Mais "désir" vaut-il "certitude"? Ils auraient quand même bien aimé avoir une démonstration. Dans d'autres coins de la salle, d'autres étudiants avaient travaillé de façon tout à fait scolaire, se contentant d'imiter (comme je m'y attendais) les démonstrations déjà faites dans le cas $\alpha = 2$. Mais curieusement, peu avaient su conclure : certains avaient dévidé correctement l'enchaînement des formules fournissant la démonstration pour α quelconque, mais *ils ne savaient pas ce qu'ils avaient démontré* ; par exemple, ils n'auraient pas su en tirer parti pour reconnaître expérimentalement, parmi les courbes (tracées sur ordinateur) que je leur fournissais, lesquelles étaient susceptibles de représenter des fonctions puissances. Je n'ai eu alors qu'à les mettre en contact avec les autres, *ceux qui savaient ce qu'ils voulaient démontrer* — et qui le *voulaient* très fort, parce qu'en tâtonnant sur des exemples ils avaient connu le plaisir d'inventer !

Ce plaisir d'inventer n'est pas réservé à une élite de "forts en maths"! Car les voies de la découverte sont multiples, et fertiles en surprises. J'ai toujours été interloqué d'entendre des collègues poser le dilemme suivant : "leur apprendre à raisonner, ou bien leur apprendre des recettes ?" (sous-entendu : aux "forts en maths" on peut apprendre le noble art du "raisonnement"; aux autres on ne peut apprendre qu'à appliquer bêtement des "recettes"). J'ai toujours eu l'impression que ce dilemme omettait l'essentiel : *apprendre à réfléchir*. Pourquoi cette omission ? Peut-être parce qu'on peut montrer des raisonnements, on peut montrer des recettes, tandis que la réflexion... cela ne se "montre" pas [31] !

29 Leurs expériences étaient de "vraies" expériences, avec des tracés précis (cf. citation (B), au § 5 ci-après).

30 Alain Connes aime citer une phrase de Paul Valéry, qui voit dans l'activité du mathématicien "une rencontre assez rare de rigueur, de sensibilité, et de désir".

31 "Exception qui confirme la règle", Marc Legrand dit avoir eu à l'université un professeur qui ne préparait pas ses cours, et réfléchissait à haute voix devant les étudiants ! Il dit avoir beaucoup appris en le regardant faire, mais il ne recommande pas cette façon d'enseigner ! Car il était l'un des seuls dans l'amphi à être attentif !

5.— Une expérience de "non-enseignement"

Par un effet naturel de "rétro-action", mes efforts pour enseigner les mathématiques "comme je les vois vraiment" ont peu à peu transformé ma vision des mathématiques. Initialement conçues pour aider à comprendre tel ou tel concept mathématique réputé important, mes "expériences cruciales" (au sens du § 2) se sont mises à vivre d'une vie propre : présentée d'une façon suffisamment simple et frappante, c'est l'expérience qui devient le centre d'intérêt, le concept n'ayant d'importance que dans la mesure où il éclaire l'expérience.

Je me suis alors aperçu que mes expériences préférées, celles qui me paraissaient à la fois les plus simples et les plus intéressantes, pouvaient se prêter à plusieurs niveaux d'éclairage conceptuel. Et ce sont mes étudiants qui m'ont fait découvrir cela. Mes premières expériences graphiques sur ordinateur (celles de la série que je nomme aujourd'hui "DVI": "Dessiner, Voir, Interpréter") avaient été conçues pour un enseignement de calcul différentiel de licence. L'un des objectifs principaux de cet enseignement était de faire comprendre le théorème des fonctions implicites, et c'est avec cet objectif en tête que j'avais mis au point une expérience "d'approximation linéaire" préfigurant celle de [Ph3], DVI 9 (expérience 1).

Comme je l'ai dit au paragraphe 2, grande a été ma surprise de voir mes étudiants incapables du moindre début de conceptualisation, ne reconnaissant même pas le concept de dérivée dans l'expérience proposée : avant "d'éclairer l'expérience" par des concepts du niveau de la licence, il fallait que j'aide mes étudiants à y voir des concepts beaucoup plus élémentaires ! J'ai alors décidé que toutes mes "expériences cruciales" devraient pouvoir se prêter à un premier éclairage conceptuel de niveau "lycée-début d'université", et mes efforts en ce sens ont fait naître en moi un fort désir d'enseigner à nouveau en première année.

L'occasion s'est présentée à la rentrée de septembre 2000. Par un heureux concours de circonstances, on m'a confié la responsabilité de tous les enseignements de mathématique de première année d'une filière (la filière MASS, Mathématiques appliquées aux sciences sociales), sur un programme rénové (à l'élaboration duquel j'avais largement participé). Jamais dans ma carrière je n'avais bénéficié de conditions aussi favorables :

1. possibilité de concevoir les enseignements de mathématiques comme un tout cohérent, à l'encontre de la déplorable tendance actuelle au morcellement ;

2. équipe pédagogique fortement motivée, et animée par un même idéal : *favoriser la créativité et l'autonomie de jugement des étudiants.*

Comment réaliser cet idéal, et encourager les étudiants à ne pas s'appuyer sans cesse sur "l'opinion du prof" ? Ma collègue et co-équipière Maryse Maurel avait déjà une longue pratique, inspirée par les idées de Marc Legrand, et nous avons conjointement, pour constituer notre équipe, annoncé notre intention de travailler de cette façon — si contraire aux habitudes de l'enseignement traditionnel.

Je connaissais déjà depuis plusieurs années les idées de Marc Legrand ([Le]), elles m'avaient séduit, mais à part quelques expériences ponctuelles je n'avais jamais eu l'occasion de les mettre en pratique à grande échelle. Le principe de base est d'aménager de très longues plages de temps durant lesquelles le professeur se dépouille *totalement* de son rôle de détenteur du savoir : il n'est que le "facilitateur", celui qui organise la communauté des élèves pour leur faire confronter leurs idées.

Contrairement à Marc Legrand (qui aime organiser des débats en amphi), c'est presque toujours en séances de Travaux Dirigés (groupes d'une trentaine d'élèves) que nous avons travaillé ainsi. Ces deux années d'expérience (car l'expérience s'est prolongée en 2001-2002, dernière année avant mon départ à la retraite) ont été pour moi les plus gratifiantes de toute ma carrière d'enseignant. Beaucoup d'étudiants m'ont dit avoir eu l'impression de découvrir les mathématiques. Et moi, j'ai eu l'impression de découvrir les étudiants ! Je croyais avoir déjà une longue expérience de la façon dont peut fonctionner "l'esprit d'invention" en mathématiques, et de la façon dont un professeur peut aider cet esprit à éclore chez un étudiant. Mais avec la pratique du "débat scientifique" à la Marc Legrand, c'est une dimension tout à fait nouvelle de l'apprentissage qui m'est apparue : la dimension *collective*, la capacité de la collectivité à dégager des idées importantes *sans intervention du professeur*, pour peu que ce dernier ait su proposer un sujet fertile, et de niveau adapté.

Une autre pratique m'a aussi beaucoup aidé à connaître les étudiants : dans le cadre d'un module de "Raisonnement Scientifique" prévu par les maquettes, nous avons demandé aux étudiants de rédiger chaque semaine, puis de synthétiser en un "Mémoire" final (tenant lieu d'examen), le compte-rendu de leurs difficultés, de leurs découvertes, de leurs réflexions sur celles-ci.

La plupart l'ont fait de façon très sincère :

"Je me rappelle encore lorsqu'on nous a annoncé qu'un mémoire était demandé dans la matière raisonnement scientifique, j'ai alors pensé à changer de section, je ne me sentais vraiment pas d'écrire un mémoire. Les différents professeurs nous ont prévenus qu'il faudrait s'habituer aux nouvelles méthodes de travail, et que tout irait bien ensuite. A l'époque je n'y croyais pas."

Voici ce qu'écrit une étudiante sur sa pratique de l'expérimentation graphique.

"Alors que j'avais l'habitude de partir de la théorie et de n'utiliser les expériences que dans le but de donner un exemple approuvant la théorie, j'ai appris à faire le contraire : faire des expériences, tester des théories et en tirer des conclusions. C'est principalement le travail sur les exponentielles [32] qui m'a fait découvrir cela. Le fait de prendre plus en compte mes expériences m'a donc conduit à soigner mes mesures et mes tracés. En effet, avant je savais souvent à quel résultat j'allais arriver, aussi je pouvais me contenter de mesures approximatives. Mais maintenant je privilégie des instruments de mesure et des tracés plus précis."

C'est donc poussée par un besoin intérieur que cette étudiante s'est mise à mieux soigner ses tracés, découvrant par elle-même l'intérêt de ce que j'ai appelé au § 2 les "véritables" expériences graphiques.

32 Cf. [Ph3], DVI 1.

La dimension collective de l'apprentissage est reflétée de façon très intéressante dans l'analyse suivante de la façon de s'exprimer dans une discussion en groupe.

"Par exemple, je me rappelle la première séance : tous plus ou moins déboussolés tant par le travail demandé (...) que par la manière de travailler (...)

"Ce qui m'avait marqué aussi c'était les mots que l'on utilisait entre nous : habitués à la rigueur du lycée qui ne laissait passer ni lapsus (de négligence) ni impropriété de langage (pour bannir l'imprécision), c'était surprenant d'entendre parler de math en langage de tous les jours. J'avais pourtant l'occasion d'en faire l'expérience moi aussi, et là je voyais alors que c'était en effet la façon la plus spontanée de le faire.

Dans ce cas, ce qui permet alors notre compréhension personnelle de ces "approximations d'idées" qui en résulte est l'intuition commune que nous avons chacun de la question, du sujet. On saisit alors à peu près ce que l'autre explique, et dès lors on peut continuer à s'exprimer de cette manière tant que nos idées restent claires dans notre tête. C'est comme si les élèves étaient "au naturel" pendant les séances de TD ; débarrassés de ces conventions de langage, ils s'investissent beaucoup plus facilement.

La preuve : d'après mes souvenirs, ça fusait déjà dans tous les sens à la première séance !"

N'est-ce pas ainsi que les chercheurs communiquent entre eux, "à l'oral" ?

Bien sûr, il y a un prix à payer pour un tel plaisir : le coût *en temps* est élevé, aussi bien pour les enseignants (travail de préparation, puis de concertation) que pour les étudiants.

"(...) il est plutôt plaisant de discuter des problèmes comme nous le faisons, mais une méthode plus classique d'enseignement, où l'on doit apprendre des résultats et des méthodes me semblait être plus rapide. Néanmoins je pense en définitive (après les trois quarts du premier semestre) que le fait que l'on soit intéressé par ces raisonnements nous permet une meilleure compréhension, et je trouve cela plus important."

Pour l'enseignant, le plus difficile est sans doute d'apprendre à être un "non-enseignant", en se libérant des vieux réflexes que lui a légués la tradition : apprendre à *ne pas vouloir tout contrôler*, apprendre à *faire confiance* — faire confiance aux élèves, faire confiance à la situation dans laquelle il a choisi de les placer : une fois la situation bien choisie, *accepter l'imprévu*, ne pas se crisper dans la poursuite d'un but délimité de façon trop rigide ; enfin, et cela résume tout, *accepter les erreurs* :

"(...) les erreurs sont tolérées. Je dirais même que les erreurs sont attendues par le professeur."

"Souvent même on comprend grâce à l'erreur de quelqu'un."

Nul besoin de longs discours, les étudiants sentent très bien l'état d'esprit du professeur par rapport à leurs erreurs ; et dans la mesure où celles-ci sont pleinement acceptées, reconnues comme un passage nécessaire, ils sont prêts à accepter les erreurs du prof, notamment son éventuel manque de maîtrise de telle ou telle situation (telle séance a été trop brouillonne, aucune idée claire ne s'en est dégagée...). L'essentiel est de pouvoir discuter franchement des erreurs des uns et des autres, dans un climat de confiance réciproque. Rien de tout cela n'est facile, cela va tellement à contre-courant de la tendance humaine à vouloir tout contrôler ! C'est un peu comme l'art du jardinier : un jardinier ne prétend pas contrôler la pousse des plantes, il sait bien que la nature lui réserve toutes sortes de surprises, et il les accepte à l'avance : son travail consiste "seulement" à créer un terrain favorable !

6.— Les chemins de la compréhension

"Je ne cherche pas à changer les étudiants", aurait déclaré A.H. à des moniteurs du CIES qui l'interviewaient.

"Je n'aime pas cette phrase" — me dit ma collègue M.M. "Si on ne cherche pas à changer les étudiants, on n'est pas un enseignant !".

Cette conversation m'a trotté dans la tête, et rentré chez moi j'ai réalisé que la phrase de M.M. me déplaisait tout autant que celle de A.H. Car l'une comme l'autre des expressions "je ne cherche pas à changer"/"je cherche à changer" semble sous-entendre un jugement : "les étudiants sont ..." (remplacez les pointillés par votre jugement favori sur les étudiants !). Curieusement d'ailleurs, je me sens en plein accord avec une autre phrase plusieurs fois entendue dans la bouche de A.H., et qui semble pourtant dire la même chose :

"Je prends les étudiants comme ils sont".

Ce qui est en cause ici ce n'est pas le langage, c'est la pensée dont ce langage est (peut-être) le reflet : notre esprit n'a-t-il pas tendance à enfermer les étudiants dans un schéma rigide (ils sont "ceci", "cela")? ou bien a-t-il assez d'ouverture pour les accueillir vraiment "comme ils sont", dans une relation vivante et fluide ?

"Ils n'ont aucune curiosité !",..., "ils n'ont aucun esprit d'initiative !" — dit-on souvent ; "ils n'ont aucune capacité de conceptualisation !" (j'ai écrit au paragraphe 2 une variante humoristique de cette phrase). Sous leur apparence de constats "objectifs" portant sur une réalité extérieure à nous (en l'occurrence "les étudiants"), de telles phrases ne parlent-elles pas avant tout de nous ? ne sont-elles pas avant tout l'expression de notre découragement ?

Il m'arrive comme tout le monde de connaître ce genre de découragement, mais je sais —pour en avoir souvent fait l'expérience— que nos étudiants (et pas seulement les meilleurs) peuvent être curieux, peuvent prendre des initiatives, et sont même capables d'accomplir par eux-mêmes des pas conceptuels importants !

Comment créer les conditions rendant possibles de telles merveilles ? J'ai déjà reconnu (à la fin du § 2) que je n'avais pas de recette miracle. Désir, et confiance, voilà ce qui me donne l'élan de départ. Et pour alimenter cet élan, il y a ma conviction que la compréhension est un processus vivant, qui refuse de se laisser enfermer dans des déterminismes mécanistes. Attention aux certitudes qui tuent !

"Si je leur dis cela de cette façon, ils vont forcément comprendre !"

Quel horrible mot que ce "forcément" ! Mon esprit laisse-t-il assez de place à leur liberté, liberté de surprendre mes prévisions, et par exemple la liberté de ne pas comprendre ? Pourquoi vouloir "forcer" leur compréhension, en leur imposant mon chemin ?

"Voilà ce qu'il faut avoir compris !"

Pourquoi "faut"-il ? Et est-ce vraiment cela que j'aimerais leur faire comprendre, et pourquoi ? Ou bien cet "il faut" impersonnel n'est-il que le reflet de ma soumission à des idées toutes faites ? Mon propre esprit se donne-t-il assez de liberté ?

Et que recouvre dans mon esprit l'expression "avoir compris" ? A quoi reconnaîtrai-je qu'ils ont vraiment compris ?

Certains enseignants préfèrent définir leurs objectifs en termes de "savoir-faire" plutôt que de "compréhension" : un "savoir-faire", ça se teste facilement à l'examen ! Mais à quoi bon la curiosité et l'esprit d'initiative s'il ne s'agit que de développer des savoir-faire codifiés, préformatés ? Je n'oublierai jamais le plaisir que j'ai eu en observant les réactions de mes étudiants de licence à un exercice d'apparence très facile, mais qui par sa nature même recélait une "chausse-trappe" (que je m'étais bien gardé de baliser !).

L'exercice (que l'on pourrait proposer au lycée) consistait simplement à établir, à partir de la définition du dictionnaire des degrés Fahrenheit, la formule de conversion de ceux-ci en degrés Celsius. Par un bref calcul tous avaient obtenu sans difficulté la formule correcte, mais une étudiante a observé que cette formule, dont elle était pourtant sûre, avait quelque chose de paradoxal [33] ; j'ai alors laissé toute la classe débattre du trouble de cette étudiante ; à l'issue d'une discussion longue et riche, où je n'ai pas eu à intervenir, une autre étudiante a résumé ainsi le sentiment général :

> Heureusement que vous nous avez fait débattre de la question de Sandra ! Car j'avais obtenu la formule correcte, mais je ne l'avais pas vraiment comprise !

Il était clair pour moi comme pour elle que le débat avait conduit la classe à une "vraie compréhension", d'un niveau conceptuel bien supérieur au simple "savoir-faire" mis en jeu dans le petit calcul initial. Et personne dans la classe n'a quêté "l'approbation du maître", tant était grande la "conviction intime" de chacun à l'issue du débat !

Beaucoup de mathématiciens, décrivant leur expérience de chercheur, parlent de "l'illumination", ce moment privilégié où "un brouillard se lève brutalement" (ce sont les termes qu'utilise Alain Connes dans [CC]. Cette joie de "l'illumination" n'est pas réservée aux mathématiciens professionnels. Nos étudiants, nos élèves des lycées et collèges peuvent en faire l'expérience, dans la mesure où nous les mettons en situation d'exercer leur esprit d'invention (comme le recommande E. Borel, cité au § 4). Ne décrit-elle pas une "illumination", cette étudiante de première année qui m'écrit dans son Compte-Rendu hebdomadaire de Raisonnement Scientifique (après deux ou trois semaines de travail sur des représentations graphiques de croissances réputées "exponentielles [34]")

33 Le trouble de cette étudiante est proposé à la réflexion des lecteurs dans [Ph3] OC 3, § 1. Il provenait d'une confusion entre la grandeur mesurée (ici, la température) et le nombre servant à la mesurer.

34 Cf. [Ph3], DVI 1 et début de OC 3.

"Quitte à changer les échelles, le graphe d'une exponentielle peut servir à représenter toutes les exponentielles qu'on veut. Je le vois, j'en suis sûre, et pourtant je n'arrive pas à le démontrer !"

Bien sûr "l'illumination" survenant après deux ou trois semaines de préparation n'a pas la même intensité que celle qui récompense deux ou trois années d'efforts (et dont A.Connes dit qu'il lui est arrivé d'en avoir "les larmes aux yeux"!). Mais je ne crois pas qu'elle soit de nature fondamentalement différente. Ne méprisons pas les "petites illuminations" ! Si petites qu'elles soient, reconnaissons-les comme des merveilles de l'esprit humain, et cherchons à les rendre possibles chez tous nos élèves ! C'est, pour moi, ce qui donne un sens à mon métier d'enseignant !

Et c'est cet élan qui me fait sans cesse remettre en question ma propre compréhension des mathématiques. En essayant de "prendre les étudiants comme ils sont", je suis sans cesse conduit à me ré-interroger sur le contenu même de mon message : est-ce vraiment cela, l'idée que je tiens à faire passer ? et cette idée, où est-elle, où pourront-ils le mieux la toucher ("ils": pas des étudiants impersonnels, mais ceux que j'ai aujourd'hui devant moi !) ? telle formulation qu'on en donne d'habitude, ou telle formulation que je suis si fier d'avoir trouvée, ce bel emballage ne risque-t-il pas d'empêcher la compréhension de mûrir et de s'épanouir naturellement ? à quel besoin répond ce beau "formatage" de l'idée ? n'ai-je pas pour le moment intérêt à "dé-formater" l'idée, pour lui permettre de vivre sa vie dans l'esprit de mes élèves ?

Ce "détricotage" perpétuel peut être représenté par la devise suivante, qui fait écho au "Ça n'est pas des maths" de l'écolière citée en introduction :

"les maths ne sont pas des maths,
et c'est cela qu'on appelle les maths". (*)

Telle pourrait être la conclusion de mon article. Je voudrais tout de même, par souci d'honnêteté et de cohérence, rajouter quelques mots sur la source d'inspiration de cette devise. En fait, j'expliquais cela plus longuement dans la version initiale de mon article, dont le long paragraphe 6 (suivi d'un long appendice) [35] replaçait les paragraphes précédents dans le contexte de ma pratique bouddhiste et des lectures correspondantes. La rédaction de Repères-IREM m'a fait savoir que plusieurs membres du Comité de Rédaction en avaient été gênés, trouvant la fin de mon texte "trop philosophique ou même spirituelle, au sens religieux du terme" ("en effet, ça n'est pas des maths" — ai-je eu envie de leur répondre, avec un clin d'œil !).

Face à cette réaction, je me suis "ré-interrogé sur le contenu de mon message". Par cette nouvelle rédaction, beaucoup plus brève, du paragraphe final, j'ai essayé de faire passer l'essentiel de mes idées en les dépouillant de tout "formatage" bouddhiste, fidèle en cela au grand enseignement bouddhiste qui a inspiré ma "phrase-fétiche" (*) :

*"le bouddhisme n'est pas le bouddhisme,
et c'est cela qu'on appelle le bouddhisme".*

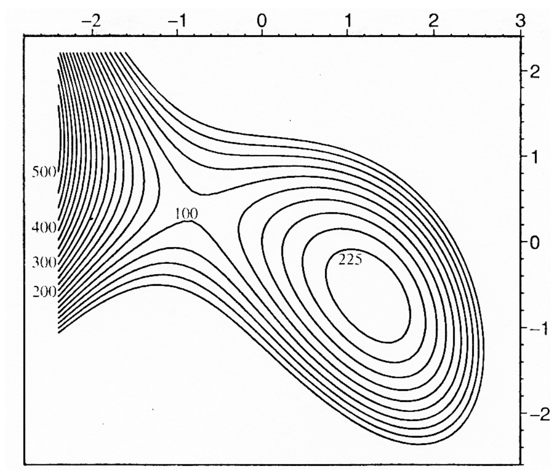
35. § 6 : "A l'école de Nagarjuna" (Nagarjuna — IIème siècle après J.C. — occupe dans la pensée bouddhiste une place aussi importante que celle de Platon dans la pensée occidentale). Appendice : "A la recherche de la réalité mathématique" (essentiellement une réflexion sur "l'illumination mathématique", déclenchée par la lecture de [CC]. Les lecteurs intéressés pourront lire cet ancien paragraphe 6 et l'appendice sur ma page web,

http://math.unice.fr/~fpham/

L'intégralité de l'ancien texte a aussi été publiée dans [*M] (où une faute de frappe a malencontreusement déformé ma "phrase-fétiche" (*).

ANNEXE "La presqu'île" [36]

La figure est une carte du relief d'une presqu'île : le contour extérieur est la ligne de niveau 0 *(bord de mer) ; l'équidistance des niveaux est de* 25 *mètres.*



1.1 Perdu dans le brouillard à l'ouest de la presqu'île, un skieur de fond (la presqu'île est en Norvège !) se dirige à la boussole, droit vers l'est.

a) Est-il possible que son itinéraire soit toujours descendant ?

b) Arrêté avec ses skis dirigés droit vers l'est, bien horizontaux pour ne glisser ni vers l'avant ni vers l'arrière, en quels points de la carte peut-il se trouver ?

c) Se reposant à la fin d'une descente avec ses skis bien horizontaux, toujours dirigés droit vers l'est, le skieur consulte son altimètre, et voit qu'il se trouve à environ 100 mètres d'altitude.
La pente est descendante vers sa gauche. Aidez-le à se situer sur la carte.
Reprenant sa route à la boussole, droit vers l'est, jusqu'à quelle altitude environ va-t-il monter avant de redescendre vers la mer ?

1.2 (...) [37]

1.3 En quels points de la carte un skieur, perdu dans un épais brouillard, aura-t-il l'impression d'être sur un plateau ?

1 bis Confrontation avec le calcul

En fait la fonction de la figure 1 a pour expression : $f(x,y) = -\dfrac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \dfrac{3}{2}$

(les valeurs des niveaux étant exprimées en centaines de mètres).

1.1 *bis* Retrouvez et précisez par le calcul vos résultats du § 1.1.

1.2 *bis* Retrouvez et précisez par le calcul vos résultats du § 1.2.

1.3 *bis* Retrouvez et précisez par le calcul vos résultats du § 1.3.

36 Extrait de [Ph3], DVI 7 36 (reproduit avec l'aimable permission des éditions Dunod).
37 où il est question de quelqu'un qui veut traverser la presqu'île du sud au nord, en se fatiguant le moins possible…

Comparaison avec une version précédente : Le "skieur" de cette histoire, qui joue un rôle important à plusieurs endroits de [Ph3]*, ne figurait pas dans la version initiale* (2000) *du même exercice, où la question* 1.1 *était libellée comme suit* [37] :

> **1.1** a) Tracez sur la carte une droite "horizontale" D, orientée Ouest-Est (par exemple la droite $y = 0$). Dessinez sur papier libre l'allure du graphe de la fonction $f|D$ (restriction de f à D), en plaçant du mieux que vous pouvez les extrema locaux de cette fonction (en pratique, les points où $f|D$ "change de sens de variation").
>
> b) En imaginant que la droite D "balaie" le plan de la carte (en prenant toutes les positions horizontales possibles), dessinez sur la carte le lieu des points où $f|D$ a un extremum local. Discutez selon la position de D le nombre de ces extrema locaux, et l'allure du graphe de $f|D$.

Bibliographie

[Bk] R. Bkouche *La démonstration : du réalisme au formalisme* (à paraître).
[Bo] E. Borel, extrait de *Documents sur la psychologie de l'invention dans le domaine de la science*, (Œuvres d'Emile Borel, tome 4).
[CC] J.P. Changeux, A. Connes *Matière à pensée* Odile Jacob 1989, 1992.
[DG] V. Durand-Guerrier *Logique et raisonnement mathématique, défense et illustration du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication* (Thèse de Doctorat, Univ. Claude Bernard, Lyon I, 1996).
[HW] J. Hubbard et B. West *Equations différentielles et systèmes dynamiques*, Cassini (Paris 1999).
[Kr] J.L. Krivine *Théorie axiomatique des ensembles* Presses Universitaires de France 1969, réédité en 2002 par les éditions Cassini sous le titre *Théorie des ensembles*.
[Kr*] J.L. Krivine *Fonctions, programmes et démonstration* Gazette des Mathématiciens, n° 60 (1994).
[Le] M. Legrand *Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse* Repère IREM 10, pp. 123-158 (1993).
[*M] M. Maurel *& al.*, "*Cahier de la Commission Inter-IREM Université*" édité en novembre 2003 par l'IREM de Lyon.
[MS] M. Maurel et C. Sackur *La presqu'île, une introduction aux fonctions de deux variables en DEUG : analyse en termes de structuration du milieu d'une situation de classe ordinaire* Actes de la XIème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques (Corps) Dorier *& al.* eds (2001), pp.167-175.
[No] D. Nordon *Les mathématiques pures n'existent pas* Actes-Sud, 1981.
[Ph1] F. Pham *Une approche "non collectiviste" de l'algèbre linéaire*, Département de Mathématiques et IREM de Nice, février 1998.
[Ph2] F. Pham *Le débat sur les "maths modernes" est-il dépassé ?* Gazette des Mathématiciens, n° 81 (juillet 1999).
[Ph3] F. Pham *Fonctions d'une ou deux variables (des fonctions élémentaires aux fonctions implicites : chemins de découverte)* Dunod (mai 2003).

38 Cette version initiale a fait l'objet d'un travail de didactique de Maryse Maurel et Catherine Sackur [MS], dont on trouvera aussi un compte-rendu abrégé dans [*M], chap. 5.