images des mathématiques
Les *maths* en *mots* et en *images*

# *Le nombre d'Euler*

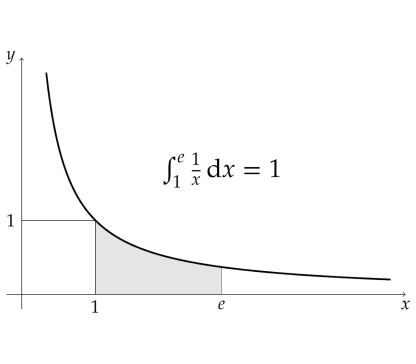
Écrit par **Pierre de la Harpe**

Publié le 5 mars 2025

DOI : 10.60868/mn90-y259 — CC BY-NC-ND 4.0

— ≥ 30 min —

Exponentielle · Logarithme · Nombre d'Euler



**Les nombres les plus célèbres sont sans doute quelques entiers (7, 3, 8, 4, 5, 13, 9, 2, 11... et provisoirement 2025), $\sqrt{2}, \pi, e$, le nombre d'or $\varphi$, et $i$ pour ceux qui aiment la complexité. Mais si $\sqrt{2}, \pi$ et $\varphi$ ont déjà été discutés dans *Images des mathématiques* [4, 10, 11], $e$ n'y avait pas encore trouvé sa place. C'est l'occasion de présenter ici quelques aspects du nombre $e$ et de ses inséparables partenaires que sont les exponentielles et les logarithmes.**

Contrairement à $\sqrt{2}, \pi$ et $\varphi$, qui sont très présents dans les mathématiques de l'antiquité, le nombre $e$ devient important bien plus tard, au XVIIe siècle. Les nombres $\sqrt{2}, \pi$ et $\varphi$ ont une incarnation géométrique : ce sont des longueurs, respectivement des diagonales d'un carré unité, du demi-périmètre d'un cercle unité et des diagonales d'un pentagone régulier de côté 1. Même si $e$ se présente occasionnellement en géométrie (figure 2), il apparaît surtout dans des domaines où les calculs sont importants : par exemple dans les calculs d'intérêts composés relatifs à un prêt d'argent, dans les logarithmes qui sont des outils pour les calculs numériques (en astronomie notamment) et dans les fondements de l'analyse et de la théorie des probabilités. Aujourd'hui le nombre $e$ est omniprésent en mathématiques.

Nous exposons ci-dessous trois définitions de $e$ et nous décrivons sa position dans une certaine hiérarchie des nombres. Évidemment $e$ n'est pas un nombre *entier* ; ce n'est pas non plus un nombre *rationnel* comme le savait déjà en 1703 Roger Cotes (un proche de Newton), et Euler y revient plusieurs fois dès 1737. De plus $e$ n'est pas un nombre *algébrique*, comme démontré par Hermite en 1873, autrement dit c'est un nombre *transcendant*. Peut-être $e$ n'est-il même pas une *période*, comme conjecturé par Kontsevich et Zagier dans leur article de 2001. Enfin nous évoquons quelques énoncés mathématiques où apparaissent le nombre $e$, les fonctions logarithme et exponentielle et les exponentielles itérées (les termes techniques, rationnel, algébrique, transcendant, période, sont définis à la section Hiérarchie et périodes).

## Sommaire

Question d'intérêt – première définition de $e$
Le logarithme naturel – deuxième définition de $e$
La fonction exponentielle – troisième définiton de $e$
Hiérarchie et périodes
Ubiquité du logarithme et de l'exponentielle
Compléments
Références
Remerciements

## Question d'intérêt – première définition de $e$

L'argent prêté rapporte un intérêt, au moins dans les cas favorables au prêteur. Ainsi, pour un prêt de 100 florins (ou francs, euros ou dollars) à un intérêt annuel de 5%, c'est-à-dire de 5/100, la somme à rembourser est de

$$100\left(1+\frac{5}{100}\right) = 105 \text{ (florins) après 1 an.}$$

Pour des périodes plus longues, il faut calculer les intérêts *composés* : les sommes dues sont

$$100\left(1+\frac{5}{100}\right)^2 = 110,25 \quad \text{après 2 ans,}$$

et

$$100\left(1+\frac{5}{100}\right)^3 = 115{,}7625 \quad \text{après 3 ans, etc.}$$

Si les périodes de calcul se suivent en *progression arithmétique* ($0-1-2-3\ldots$ ici en années), les sommes correspondantes à rembourser sont en *progression géométrique* ($100-105-110,25-115,7625\ldots$ ici en florins).

Reprenons avec un taux d'intérêt $\tau$ (ci-dessus $\tau = 5/100$). Un créancier plus vorace saura tirer profit de calculer deux fois plus fréquemment un intérêt moitié, autrement dit avec un taux d'intérêt de $\tau/2$ tous les semestres : soit $100(1+\tau/2)$ après 6 mois, donc

$$100\,(1+\tau/2)^2 = 100\left(1+\tau+\tau^2/4\right) \quad \text{après 1 an ;}$$

et de même avec un taux de $\tau/12$ tous les mois, donc

$$100\,(1+\tau/12)^{12} \quad \text{après 1 an ;}$$

et de même avec un taux de $\tau/365$ tous les jours, donc

$$100\,(1+\tau/365)^{365} \quad \text{après 1 an ;}$$

enfin pour un intérêt *continûment composé*

$$100\,e^{\tau} \quad \text{après 1 an, où } e^{\tau} = \lim_{n\to\infty}(1+\tau/n)^n.$$

Cette limite dans un problème d'usure et d'intérêts composés apparaît dans un article de Jakob Bernoulli de 1685 [3, p. 429]. Le cas particulier de $\tau = 1$ (intérêt de 100%) nous mène à une *première définition* du nombre d'Euler :

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,28\ldots \tag{1}$$

Les 23 décimales ci-dessus sont celles calculées par Leonard Euler et écrites dans son *Introduction à l'analyse infinitésimale* (voir [5], [8, p. 90] et la fin de notre complément Sur $e$ défini par la série $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$). Pour les 10 000 premières décimales, voir [20].

La notation $e$ est aujourd'hui universellement adoptée. La plupart des historiens s'accordent à penser qu'Euler ne l'utilise pas en référence à son propre nom, mais parce que $e$ est la première lettre à disposition quand $a, b, c, d$ apparaissent déjà, ou la première voyelle après $a$. Pour une discussion plus approfondie, voir [21].

Pour définir ainsi $e$ comme une *limite*, il faut bien sûr d'abord définir précisément la notion de limite. Il faut ensuite montrer que la limite (1) existe. Cela résulte de ce que la suite des nombres $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est d'une part croissante et, d'autre part, bornée ; voir le complément

Existence de la limite $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

L'écriture $e = 2{,}718\,281\,828\,4\ldots$ doit être elle aussi bien comprise : elle indique qu'il existe une suite *infinie* d'approximations

$$2 \quad 2{,}7 \quad 2{,}71 \quad 2{,}718 \quad 2{,}7182 \quad 2{,}71828 \quad \ldots$$

dont la limite est le nombre $e$. La définition précise de limite et son usage actuel résultent d'une très longue maturation historique, disons depuis l'époque d'Achille, de la tortue, et de Zénon d'Élée, vers 450 avant J.-C., jusqu'à celle de Weierstrass, de la deuxième moitié du XIXe siècle. Ceci dit, avant que la définition rigoureuse soit mise en place, des mathématiciens comme Fermat, Newton, Leibniz, Euler, et Cauchy ont utilisé des limites avec de plus en plus de sureté et de virtuosité.

## Le logarithme naturel – deuxième définition de $e$

La quadrature d'une surface est la recherche d'un carré dont l'aire est égale à celle de la surface. La quadrature d'une courbe est un calcul d'aire qu'on peut présenter comme suit.

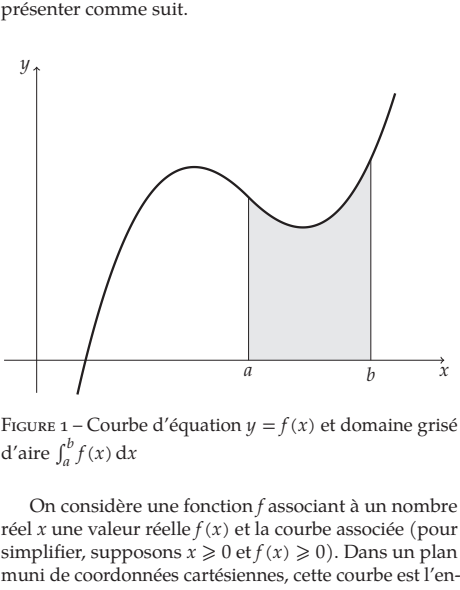


Figure 1 – Courbe d'équation $y = f(x)$ et domaine grisé d'aire $\int_a^b f(x)\,dx$

On considère une fonction $f$ associant à un nombre réel $x$ une valeur réelle $f(x)$ et la courbe associée (pour simplifier, supposons $x \geqslant 0$ et $f(x) \geqslant 0$). Dans un plan muni de coordonnées cartésiennes, cette courbe est l'ensemble des points dont les coordonnées $(x, y)$ satisfont l'équation $y = f(x)$. Soit $[a, b]$ un intervalle de la droite réelle avec $0 \leqslant a \leqslant b$ ; le domaine limité par la courbe, le premier axe (l'axe des $x$) et deux perpendiculaires au premier axe par les points $a$ et $b$, a une aire que nous notons $\int_a^b f(x)\,dx$ (figure 1). L'usage du signe $\int$ pour indiquer une intégrale, ou ici une aire, est dû à Gottfried Wilhelm Leibniz [19, p. 297][1] et la notation $\int_a^b$ indiquant les bornes d'intégration est due à Joseph Fourier [9, p. 237]. La *quadrature de la courbe*, c'est le calcul des aires $\int_a^b f(x)\,dx$.

On doit à Archimède (IIIe siècle avant J.-C.) la quadrature de la parabole, plus précisément le calcul de l'aire d'un domaine limité par un arc de parabole et un segment de droite. Aujourd'hui, on peut penser que la parabole est le graphe d'une fonction définie par $f(x) = x^2$ et que le résultat d'Archimède est équivalent au calcul d'aire qu'on peut écrire

$$\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

La formulation d'Archimède est bien différente ; par ailleurs, la lecture d'Archimède est un exercice difficile. Pour aider le lecteur entreprenant, je signale la traduction anglaise de Heath [2] et un texte de Daniel Perrin [22].

Au début du XVIIe siècle, plusieurs mathématiciens dont Fermat, Cavalieri et Wallis ont résolu la quadrature de ce qui sont pour nous les fonctions de la forme $f(x) = x^k$ $(x > 0)$ où, selon les auteurs, $k$ est un entier, un nombre rationnel ou un nombre réel, mais toujours un nombre différent de $-1$. La réponse en notation moderne est

$$\int_a^b x^k\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}(b^{k+1} - a^{k+1})$$

Enfin on comprit la quadrature de l'hyperbole, c'est-à-dire la quadrature de la fonction $f(x) = x^{-1} = 1/x$, et son lien avec la fonction logarithme. Ce lien apparaît dans un résultat de Grégoire de Saint-Vincent, publié en 1647 : pour des nombres $a > 0$ et $b > 0$,

$$\int_1^{ab}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^a \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

Pour une démonstration de la formule (2), voir le complément

Sur $e$ défini par $\ln(e) = 1$

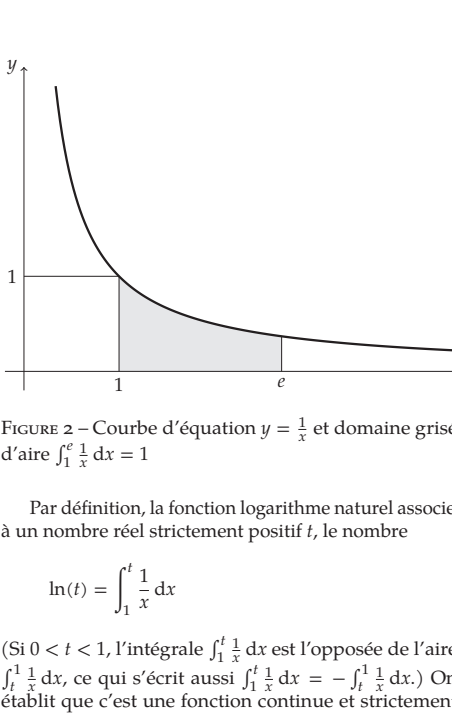


Figure 2 – Courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ et domaine grisé d'aire $\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 1$

Par définition, la fonction logarithme naturel associe, à un nombre réel strictement positif $t$, le nombre

$$\ln(t) = \int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

(Si $0 < t < 1$, l'intégrale $\int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ est l'opposée de l'aire $\int_t^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, ce qui s'écrit aussi $\int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\int_t^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.) On établit que c'est une fonction continue et strictement croissante, de limite $-\infty$ quand $t$ tend vers 0, et de limite $+\infty$ quand $t$ tend vers $+\infty$. L'identité (2) peut s'écrire

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

On peut donc poser une *deuxième définition* de $e$ (voir figure 2) : c'est le nombre pour lequel on a

$$\ln(e) = 1 \quad \text{et} \quad \int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 1$$

On montre dans le complément Sur $e$ défini par $\ln(e) = 1$ que cette définition est bien équivalente à la précédente.

## La fonction exponentielle – troisième définiton de $e$

Soit $x$ un nombre réel. Pour écrire autrement $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, on peut utiliser le théorème [2] du binôme

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= 1 + n\frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{x^3}{n^3} \\ &= 1 + x + x^2\frac{(1-\frac{1}{n})}{1\cdot 2} + x^3\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\end{aligned}$$

Un théorème non banal sur les limites de séries $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(n)x^k$ dépendant d'un paramètre (ici $n$) permet de justifier que, lorsque $n$ tend vers l'infini, on peut remplacer chaque terme de cette série par sa valeur limite ; on obtient donc

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

Rappelons que $k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(k-1)\cdot k$, par exemple $2! = 1\cdot 2 = 2$ et $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$ et $4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$ ; et bien sûr $0! = 1$ (plus généralement, la seule définition possible pour un « produit » de zéro facteurs est qu'il vaut 1).

Dans le cas particulier $x = 1$, on obtient

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots \tag{3}$$

autrement dit $e = \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!}\right)$, ce qui s'écrit aussi $e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$. On peut également prendre cette égalité comme une *troisième définition* de $e$, qui est équivalente à la première ; voir le complément

Sur $e$ défini par la série $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$

Lorsqu'on considère que $x$ est un nombre quelconque, on obtient une définition de la fonction *exponentielle*, qui prend en $x$ la valeur

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

Parmi les propriétés remarquables de cette fonction, relevons :

- $e^x > 0$ pour tout nombre réel $x$ et $e^0 = 1$ ;
- $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ;
- $e^{x+y} = e^x e^y$ pour tous nombres réels $x, y$, de sorte que si $x_1, x_2, \ldots, x_q$ sont en progression arithmétique (c'est-à-dire tels que $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = \ldots$), alors $e^{x_1}, e^{x_2}, \ldots, e^{x_q}$ sont en progression géométrique (c'est-à-dire $e^{x_2}/e^{x_1} = e^{x_3}/e^{x_2} = e^{x_4}/e^{x_3} = \ldots$) ;
- la fonction exponentielle est strictement croissante, continue, dérivable et sa dérivée en $x$ est égale à $e^x$.

Historiquement, ce n'est pas la première définition de la fonction exponentielle. Sa première apparition remonte à un problème posé en 1638 par Florimond de Beaune à René Descartes, peu après que de Beaune ait lu la *Géométrie* de Descartes (un appendice au *Discours de la méthode*, paru en 1637). De Beaune y pose un problème géométrique : trouver une courbe, graphe d'une fonction $y = f(x)$, telle que, en tout point $P$ de la courbe, la longueur du segment $TN$ défini sur l'axe des $x$ par la tangente en $P$ et la verticale par $P$ soit indépendante de $P$ – voir figure 3 où les longueurs $\overline{TN}$ et $\overline{T'N'}$ sont égales. La solution du problème, qui se fit attendre, fut publiée par Leibniz en 1684. Pour les détails de cette histoire, voir [23], ainsi que la lettre de Descartes à de Beaune du 20 février 1639 et les commentaires des éditeurs Charles Adam et Paul Tannery [1, p. 663, 676].

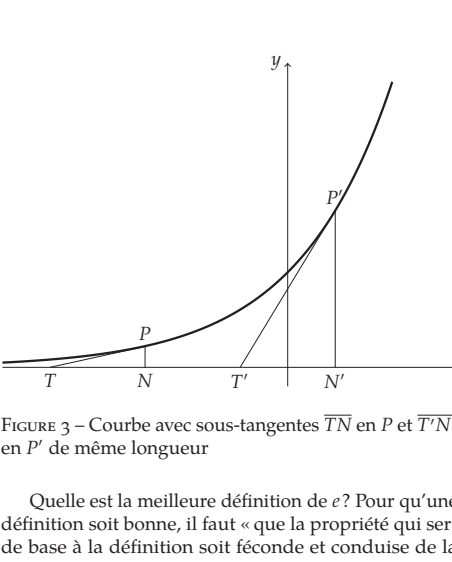


Figure 3 – Courbe avec sous-tangentes $\overline{TN}$ en $P$ et $\overline{T'N'}$ en $P'$ de même longueur

Quelle est la meilleure définition de $e$ ? Pour qu'une définition soit bonne, il faut « que la propriété qui sert de base à la définition soit féconde et conduise de la manière la plus directe aux autres propriétés plus compliquées qu'il est important ou de découvrir ou d'enseigner » comme l'on dit et répété Gaspard Monge, Jean-Pierre Kahane et bien d'autres [14]. Faute de décider ici quelle est la meilleure définition, citons ces lignes de Donald E. Knuth.

> *This rather arbitrary definition (in fact, we haven't really defined e) probably doesn't strike the reader as being a very "natural" logarithm; yet we'll find that* ln *x seems more and more natural, the more we work with it.*
>
> [15, p. 23]

## Hiérarchie et périodes

Dans l'étude des mathématiques, on apprend successivement diverses espèces de nombres. D'abord les *entiers naturels*, $1, 2, 3, 4, 5\ldots$ dont l'ensemble est traditionnellement noté $\mathbf{N}$ (au moins en anglais – en français, l'usage veut que $\mathbf{N}$ contienne aussi 0). Puis les *nombres entiers*

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

(On utilise aussi les expressions « entiers relatifs » que je n'aime pas du tout, « entiers algébriques » qui produit de très fâcheuses confusions, et « entiers rationnels » qui prend toute sa cohérence dans le contexte des entiers de corps de nombres.)

Notons au passage qu'il peut être difficile de savoir si un nombre est ou n'est pas dans l'un de ces ensembles ! Par exemple, le nombre

$$e^{e^{e^{e}}}$$

est-il entier ? Il est très naturel de conjecturer que la réponse est négative et aussi de penser que le problème est trop farfelu pour justifier un effort de recherche. En fait la réponse semble inaccessible, parce que les exponentielles itérées sont des nombres trop gigantesques pour être abordables. Un gigantisme qui a entre autres fasciné Euler et sur lequel nous revenons à la section ??.

Puis vient l'ensemble

$$\mathbf{Q} = \left\{\frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N} \text{ et } \operatorname{pgcd}(p, q) = 1\right\}$$

des nombres rationnels, qui contient $\frac{1}{2}, \frac{7}{11}, -\frac{3}{4}, 3 = \frac{3}{1}\ldots$ (mais $p = 9$ et $q = 12$ ne conviennent pas puisque 3 les divise tous les deux). L'ensemble $\mathbf{Q}$ est contenu dans l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels qui est une certaine complétion de $\mathbf{Q}$. Il y a plusieurs manières de définir $\mathbf{R}$ (classes de suites de Cauchy de nombres rationnels, coupures de Dedekind, classes de quasi-morphismes $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$) mais il y faut beaucoup de soin et nous n'en dirons pas plus ici, sinon que les définitions modernes résultent aussi d'un long processus historique.

Il y a ensuite les *nombres algébriques*, qui sont les nombres $z$ – en fait les nombres complexes mais nous choisissons de ne pas tout expliquer ici – solutions d'équations polynomiales à coefficients rationnels de la forme

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_k z^k = 0$$

avec $k \geqslant 1$, $a_0 \in \mathbf{Q}$ et $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k \in \mathbf{Q}$ non tous nuls. On note $\overline{\mathbf{Q}}$ l'ensemble des nombres algébriques. Par exemple $\sqrt{2}$ et le nombre d'or $\varphi = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ sont des nombres algébriques puisque $2 - (\sqrt{2})^2 = 0$ et $1 + \varphi - \varphi^2 = 0$. On sait que $\sqrt{2}$ et $\varphi$ ne sont pas rationnels depuis l'antiquité ($\sqrt{2}$ est déjà mentionné dans le « Théétète », un dialogue de Platon). On sait aussi que $e$ n'est pas rationnel (Coates, 1703, et Euler, 1737, voir le complément Sur $e$ défini par la série $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$) et $\pi$ non plus (Lambert, 1768). Un nombre qui n'est pas algébrique est dit *transcendant*. Hermite a montré en 1873 que $e$ est transcendant et Lindemann en 1882 que $\pi$ est transcendant. Curiosité pour les spécialistes : on ne sait toujours pas si $\pi^e$ est transcendant mais on sait que $e^{\pi}$ l'est (Gelfond-Schneider, 1934) ; voir le complément

Transcendance de $e^{\pi}$ et théorème de Gelfond–Schneider

On a défini bien plus récemment l'ensemble $\mathcal{P}$ des *périodes* : ce sont les nombres $z$ dont les parties réelle et imaginaire sont des valeurs d'intégrales absolument convergentes de fonctions rationnelles à coefficients rationnels sur des domaines de $\mathbf{R}^n$ définis par des inégalités polynomiales à coefficients rationnels [16]. On sait que $\mathcal{P}$ est un ensemble dénombrable qui contient $\overline{\mathbf{Q}}$ et aussi certains nombres transcendants. Par exemple $\pi$ est une période, comme le montre chacune des égalités

$$\pi = \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad \pi = \int_0^1 \frac{4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Pour tout nombre algébrique $a$, le logarithme $\ln(a)$ est une période ; par exemple $\ln(2) = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ est une période.

C'est un problème ouvert de savoir si $e$ est une période ; Kontsevich et Zagier conjecturent que non. Même si on sait que l'ensemble des périodes est dénombrable, en particulier bien plus petit que l'ensemble de tous les nombres, on ne sait pas exhiber explicitement un nombre qui ne soit pas une période. Autrement dit on ne sait presque rien.

## Ubiquité du logarithme et de l'exponentielle

Le nombre $e$, et ses inséparables partenaires les fonctions logarithme naturel et exponentielle, sont omniprésents en mathématique. Voici un petit échantillon de quelques énoncés en mathématique et en physique où apparaissent $e$, $\ln(x)$ et $e^x$.

### Logarithmes et calculs

Historiquement, les fonctions logarithme et leurs premières tabulations remontent au début du XVIIe siècle. Leur utilité en calcul numérique vient de ce que, une fois la table de logarithmes calculée, pour multiplier deux nombres $x$ et $y$, il est souvent très avantageux de chercher dans la table $\log_a(x)$ et $\log_a(y)$, de calculer la somme $\log_a(x) + \log_a(y)$ puis de trouver dans la table le nombre $xy$ dont le logarithme en base $a$ est cette somme.

Les calculs nécessaires à la confection d'une table peuvent prendre des années. Ce fut le cas pour les tables publiées par John Napier (en latin Ioannes Neper) en 1614 et Briggs en 1624. Les calculs avec une bonne table de logarithme à disposition sont alors considérablement plus courts que sans table. C'est ce que dit si bien Pierre Simon de Laplace dans un commentaire sur Kepler :

> *« Il [Kepler] eut dans ses dernières années l'avantage de voir naître et d'employer la découverte des logarithmes, due à Neper, baron écossais, artifice admirable ajouté à l'ingénieux algorithme des indiens ; et qui, en réduisant à quelques jours le travail de plusieurs mois, double, si l'on peut ainsi dire, la vie des astronomes et leur épargne les erreurs et les dégoûts inséparables des longs calculs. »*
>
> [18, Livre V, Chapitre IV]

Pour définir une fonction logarithme, on peut formuler aujourd'hui ses choses comme suit. Pour un nombre $a > 1$ donné, on définit le *logarithme de base a* comme étant la fonction $\log_a : ]0, +\infty[ \to \mathbf{R}$ telle que, pour tout $x > 0$,

$$a^{\log_a(x)} = x$$

On peut alors montrer qu'il existe une constante $k_a$ telle que, pour $x$ proche de 1, le logarithme $\log_a(1+x)$ est proche de $k_a x$ ; plus précisément

$$\lim_{x\to 0}\frac{k_a x}{\log_a(1+x)} = 1$$

(en fait, $k_a = \left(\log_e(a)\right)^{-1}$). Euler plaide pour le choix le plus simple, c'est-à-dire le choix de $a$ pour lequel $k_a = 1$, et définit $e$ comme étant le nombre tel que

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\log_e(1+x)} = 1$$

et, mieux, tel que, pour tout $|x|$ petit [8, p. 90],

$$\log_e(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots \tag{4}$$

On appelle *logarithme naturel* – anciennement logarithme hyperbolique – le logarithme de base $e$ et on écrit $\ln(x)$ pour $\log_e(x)$ (les logarithmes décimal et binaire sont respectivement les logarithmes de base 10 et 2).

La série (4) est la série de Mercator. Les experts en histoire disent qu'elle était déjà connue de Newton (1665) et Hudde (1666), qui ne la publièrent pas, et qu'on la trouve dans un traité de Mercator paru en 1668.

### Formule d'Euler

La *formule d'Euler* établit une relation fondamentale entre la fonction exponentielle complexe et les fonctions trigonométriques. Pour tout nombre réel $x$,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

C'est ainsi que dans son *Introductio* [8, p. 90], où Leonhard Euler écrit entre autres $e^{+v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1}\sin v$ et $e^{-v\sqrt{-1}} = \cos v - \sqrt{-1}\sin v$. Par exemple, si $x = \pi$, alors

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

qu'on appelle parfois l'identité d'Euler et que Richard Feynman considérait comme la formule la plus remarquable des mathématiques.

### Combinatoire

Un paquet de cartes numérotées de 1 à $n$ peut être mélangé de $n!$ manières différentes. Par exemple $2! = 2$ (ordres possibles des cartes après mélange $(1, 2)$ et $(2, 1)$) et $3! = 6$ (ordres possibles $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ et $(3, 2, 1)$). Pour $n = 52$, on trouve $52!$, le produit des 52 premiers nombres entiers : c'est un nombre de 68 chiffres. Soit $d_n$ le nombre des *dérangements*, c'est-à-dire des mélanges tels que la carte $k$ n'apparaisse jamais au $k$-ième rang. Par exemple $d_2 = 1$ (un seul dérangement $(2, 1)$) et $d_3 = 2$ (deux dérangements $(2, 3, 1)$ et $(3, 1, 2)$) et $d_4 = 9$ (vérification en exercice pour le lecteur) ; pour d'autres valeurs, voir la suite A000166 de [17]. Quelle est pour $n$ grand la proportion $d_n/n!$ ? La réponse asymptotique est donnée par la formule

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{n!} = \frac{1}{e}$$

Mieux, on connaît la réponse pour tout $n$ : le nombre $d_n$ est la partie entière du nombre $\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}$. À une reformulation mineure près, la réponse fut publiée par Leonhard Euler [6].

Et que vaut $n!$ ? C'est l'occasion de mentionner l'approximation très utile $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ qui remonte à Stirling (1730). Le signe $\sim$ signifie que le quotient du terme de gauche par le terme de droite tend vers 1 lorsque $n$ tend vers l'infini. Par exemple $52! \approx 8{,}05 \times 10^{67}$ (à mieux que 2 pour mille près).

### Théorème des nombres premiers

Combien y a-t-il de nombres premiers ? C'est-à-dire combien d'entiers $p \geqslant 2$ qui ne sont divisibles que par les deux entiers 1 et $p$ ? On sait depuis Euclide au moins qu'il y en a une infinité. Mais plus précisément combien y en a-t-il qui sont plus petits qu'un nombre entier $n$ donné ? La réponse est donnée par le *théorème des nombres premiers*, conjecturé par Gauss et Legendre dans les années 1790, et démontré indépendamment en 1896 par Hadamard et de la Vallée Poussin : pour $n$ grand, il y en a environ $n/\ln(n)$. Plus précisément,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{\ln(n)}}{\pi(n)} = 1$$

où $\pi(n)$ désigne le nombre des nombres premiers $p$ tels que $2 \leqslant p \leqslant n$. Par exemple $\pi(10) = 4$ compte les premiers 2, 3, 5 et 7.

### Loi exponentielle en physique

Quelle est la *loi de désintégration radioactive* ? Un échantillon de matière contenant initialement $N$ atomes d'un certain isotope radioactif n'en contient plus que $N/2$ après un certain temps, indépendant de $N$ et appelé la demi-vie $t_{1/2}$ de l'isotope. Ainsi le nombre $N(t)$ d'atomes de l'isotope à l'instant $t$ satisfait $N(t + t_{1/2}) = N(t)/2$. Mieux, la dérivée de $N(t)$ est donnée par

$$N'(t) = -\lambda N(t) \tag{5}$$

où $\lambda = \ln(2)/t_{1/2}$. On s'intéresse à des échantillons avec un nombre $N$ très grand d'atomes et on s'autorise donc à considérer $N$ comme une fonction continue et dérivable de $t$, plutôt que comme une fonction à valeurs entières. La relation 5 est une équation différentielle dont la solution est

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$$

Ainsi, si $t_{1/2}$ est grand, le nombre $N(t)$ ne diminuera de moitié que dans longtemps (ce qui pose des problèmes non résolus aux entrepreneurs de centrales nucléaires et à leurs descendants). Plus généralement, un grand nombre d'équations différentielles de la physique classique expriment que certaines quantités ont des dérivées proportionnelles aux quantités elles-mêmes et ont donc des solutions qui s'expriment simplement avec des fonctions exponentielles.

### Chaînette

La *chaînette* est la courbe que dessine un fil flexible pesant (ou corde ou chaîne) suspendu à ses extrémités et soumis à la force de gravité ; le fil est supposé de densité et de diamètre uniformes. Galilée avait affirmé que cette courbe a une forme très voisine d'une parabole. Une cinquantaine d'années plus tard, en 1691, répondant à un défi de Jacques Bernoulli, Leibniz, Jean Bernoulli et Huygens obtiennent indépendamment des constructions de la chaînette qui est la courbe d'équation

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$$

On retrouve cette forme dans l'architecture de Gaudi.

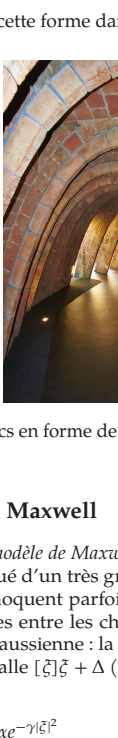


Figure 4 – Arcs en forme de chaînette dans la Casa Milà de Gaudi

### Modèle de Maxwell

Dans le *modèle de Maxwell d'un gaz parfait* à l'équilibre, constitué d'un très grand nombre de molécules qui s'entrechoquent parfois, les vitesses $v = (\xi, \eta, \zeta)$ des molécules entre les chocs obéissent à une loi de probabilité gaussienne : la probabilité pour que $\xi$ soit dans l'intervalle $[\xi]\xi + \Delta$ (avec $\Delta$ très petit) est $f(\xi)\Delta$, où

$$f(\xi) = ae^{-\gamma|\xi|^2}$$

(et bien sûr de même pour $\eta$ et $\zeta$). La constante $\gamma$ est donnée par $m/2kT$ – où $m$ est la masse d'une molécule, $T$ la température absolue du gaz et $k$ la constante de Boltzmann – et la constante $a$ est déterminée par $\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 1$, c'est-à-dire $a = \sqrt{\gamma/\pi}$.

### Exponentielle et médias

Les quantités et les propriétés dites *à croissance exponentielle* surabondent dans les médias. Pour que le terme soit justifié, il faut bien sûr qu'une telle quantité soit mesurable par un nombre positif $q$, que $q$ dépende du temps $t$ et que son évolution soit au moins approximativement exponentielle, au sens où $q(t) = ce^{\lambda t}$ pour des constantes $c$ et $\lambda$ convenables. Une variante de fonction à croissance exponentielle pour une quantité qui dépend d'un « temps discret » (*i.e.* d'un entier $n$), au lieu d'un « temps continu » (*i.e.* d'un nombre réel $t$), est la fonction $q(n) = cr^n$.

Mais très souvent les médias pervertissent le terme et disqualifient de croissance exponentielle toute quantité ayant une croissance rapide. Il existe pourtant des fonctions à croissance beaucoup plus lente – même si parfois à croissance bien trop rapide pour notre goût – par exemple $q(t) = 1000t^3$. Il existe aussi des fonctions à croissance beaucoup plus rapide que les exponentielles, par exemple $q(t) = e^{t^2}$ ou les exponentielles itérées $q(n) = 2 \uparrow n$ de la section qui suit. Il existe enfin des fonctions à *décroissance* exponentielle, par exemple $q(t) = e^{-t}$.

**Fin provisoire de l'article**

Pour des raisons techniques, la version complète de cet article est disponible seulement au format paginé à retrouver sur la page 10.60868/mn90-y259.

## Compléments

### Existence de la limite $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Une suite numérique $t_1, t_2, t_3\ldots$ possède une limite $\ell$ si, pour toute borne $\varepsilon > 0$, aussi petite soit-elle, il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que $|\ell - t_n| < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_0$. Pour montrer que la limite du titre existe, il suffit de montrer que la suite de $n$-ième terme $t_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est croissante et bornée.

Rappelons d'abord que, pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $(1-x)^n \geqslant 1 - nx$. Pour le montrer, on procède par récurrence sur $n$. D'une part c'est évident pour $n = 1$. D'autre part, pour $n \geqslant 2$, on suppose que $(1-x)^{n-1} \geqslant 1 - (n-1)x$ et on en déduit que

$$\begin{aligned}(1-x)^n &\geqslant (1-(n-1)x)(1-x) \\ &= 1 - nx + (n-1)x^2 \\ &\geqslant 1 - nx\end{aligned}$$

Montrons que la suite $(t_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante en calculant le quotient de deux termes consécutifs :

$$\begin{aligned}\frac{t_n}{t_{n-1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} \\ &= \left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)^{n-1}\frac{n+1}{n} \\ &= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &\overset{*}{\geqslant} \left(1-\frac{n-1}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n^3} > 1\end{aligned}$$

où l'inégalité $\overset{*}{\geqslant}$ résulte du rappel préliminaire.

Montrons ensuite que la suite $(t_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée. Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) \\ &+ \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \\ &+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\ &\leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3\end{aligned}$$

L'inégalité $\leqslant$ se déduit du fait que $\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$ pour tout $k$.

Il en résulte que la suite $(t_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers une limite et que cette limite, notée $e$, satisfait

$$2 < e := \lim_{n\to\infty} t_n < 3$$

Il est facile d'améliorer la borne inférieure, par exemple

$$\begin{aligned}1 + 1 = 2 &< \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25 \\ &< \left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = 2{,}61305\ldots \\ &< \left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = 2{,}71456\ldots \\ &< e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}71828\ldots\end{aligned}$$

On peut aussi montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ est décroissante, tend vers $e$ et en déduire des bornes supérieures pour $e$.

Ces bornes fournissent des approximations de $e$ qui sont médiocres. Par exemple $\left(1+\frac{1}{23}\right)^{23} \approx 2{,}661$ ne fournit même pas la première décimale après la virgule de $e$. En comparaison, la définition donnée par l'équation (3) suggère l'approximation $\sum_{k=0}^{23}\frac{1}{k!} \approx e$ qui fournit correctement les 23 premières décimales de $e$ (voir la fin du complément Sur $e$ défini par la série $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$).

### Sur $e$ défini par $\ln(e) = 1$

Montrons d'abord l'équation (2). Soient $a, b$ deux nombres strictement positifs ; dans un premier temps, on suppose $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$. Pour un entier $n \geqslant 1$ de plus en plus grand, l'aire de la réunion des rectangles indiqués sur la figure 5, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a+\frac{k-1}{n}(b-a)}\frac{1}{n}(b-a)$ est de plus en plus proche de l'aire $\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

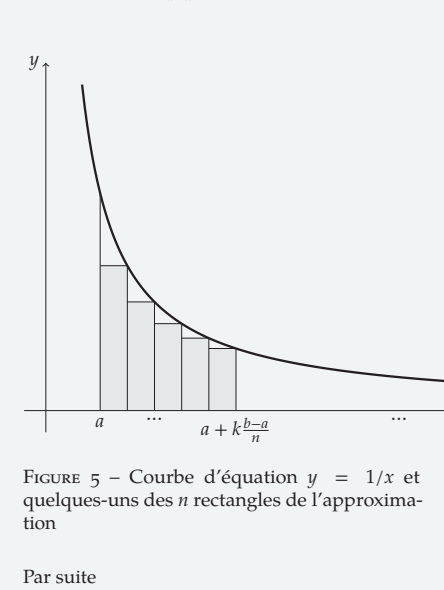


Figure 5 – Courbe d'équation $y = 1/x$ et quelques-uns des $n$ rectangles de l'approximation

Par suite

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a+\frac{k-1}{n}(b-a)}\frac{1}{n}(b-a)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k-1}{n}\left(\frac{b}{a}-1\right)}\frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}-1\right)\right)\end{aligned}$$

ne dépend que du rapport $\frac{b}{a}$. En particulier, puisque $\frac{ab}{a} = \frac{b}{1}$, on a

$$\int_1^{ab}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^a \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_a^{ab}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^a \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Ceci vaut encore lorsque $a < 1$ si on prend soin de comprendre $\int_1^a \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ comme étant l'opposée de l'aire $\int_a^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ ; idem lorsque $b < 1$.

Montrons maintenant que le nombre $e$ défini comme à la section Le logarithme naturel – deuxième définition de $e$ par $\ln(e) = \int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 1$ est égal au nombre $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ de la section Question d'intérêt – première définition de $e$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, l'aire du rectangle $ABCD$, l'aire $\int_1^{1+\frac{1}{n}}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ et l'aire du rectangle $ABEF$ de la figure 6 satisfont

$$\begin{aligned}\text{aire}(ABCD) = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}} &\leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{n}\cdot 1 = \text{aire}(ABEF)\end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \leqslant n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \leqslant 1$$

Par suite $\lim_{n\to\infty}\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = 1$. Comme la fonction ln est continue, on a aussi $\ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\right) = 1$, ce qui montre que le nombre $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est égal au nombre $e$ défini dans la section Le logarithme naturel – deuxième définition de $e$.

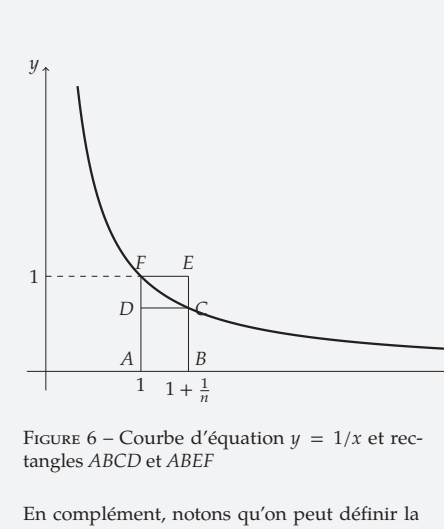


Figure 6 – Courbe d'équation $y = 1/x$ et rectangles $ABCD$ et $ABEF$

En complément, notons qu'on peut définir la fonction exponentielle comme la fonction réciproque de la fonction logarithme naturel et en déduire les propriétés de l'exponentielle indiquées à la section La fonction exponentielle – troisième définiton de $e$.

### Sur $e$ défini par la série $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$

Montrons que le nombre défini à la section Question d'intérêt – première définition de $e$ est égal au nombre défini à la section La fonction exponentielle – troisième définiton de $e$. Pour cela, considérons les deux suites $(s_n)_{n\geqslant 1}$ et $(t_n)_{n\geqslant 1}$, où $s_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ est la $n$-ième somme partielle de la série $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ et où $t_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est comme dans le complément Existence de la limite $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

La suite $(s_n)_{n\geqslant 1}$ est évidemment croissante. Elle est aussi bornée car $s_n \leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 3$ pour tout $n$. Elle a donc une limite qui s'écrit $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$. Nous devons montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \tag{6}$$

D'une part, par la formule du binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned}t_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) \\ &+ \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots \\ &+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\ &\leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = s_n\end{aligned}$$

de sorte que $\lim_{n\to\infty} t_n \leqslant \lim_{n\to\infty} s_n$.

D'autre part, pour $m$ et $n$ tels que $n \geqslant m$, on a

$$\begin{aligned}t_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &\geqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) \\ &+ \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots \\ &+ \frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\end{aligned}$$

Ceci implique d'abord, pour $n$ tendant vers l'infini, avec $m$ fixé,

$$\lim_{n\to\infty} t_n \geqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!} = s_m$$

et ensuite, pour $m$ tendant vers l'infini, $\lim_{n\to\infty} t_n \geqslant \lim_{m\to\infty} s_m$.

L'équation (6) en résulte.

Cette définition de $e$ permet de montrer facilement que $e$ est irrationnel. En effet, si $e$ était rationnel, il existerait un entier $n \geqslant 2$ tel que $n!e$ serait entier. Comme

$$n!e = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n!}{k!}$$

le nombre $\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n!}{k!}$ serait entier (car différence de deux entiers). Mais ce n'est pas le cas car

$$\begin{aligned}0 < \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n!}{k!} &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &+ \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \\ &< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots \\ &= \frac{1}{n} < 1\end{aligned}$$

Coates et Euler ont d'autres arguments. Quand ils affirment que $e$ est un nombre irrationnel, c'est au motif que le développement en fraction continue de $e$ semble infini. Euler dit au moins que l'affirmation est « probable »[1]. Il fallut attendre un peu pour d'autres démonstrations. La preuve ci-dessus est celle de Fourier dans son cours à la première promotion de l'École polytechnique (An IV, 1795-1796) [13].

La troisième définition permet aussi de calculer des approximations numériques de $e$. Soit $n \geqslant 1$ ; le « reste »

$$\begin{aligned}r_n = e - s_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\Big(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} \\ &+ \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \cdots\Big)\end{aligned}$$

est majoré par

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)^3} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1}\end{aligned}$$

de sorte que

$$s_n < e = s_n + r_n < s_n + \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1}$$

Par exemple, $s_4 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{65}{24}$ et $r_4 < \frac{1}{120}\frac{6}{5} = \frac{1}{100}$, donc

$$s_4 = 2{,}708\,333\,3\ldots < e < s_4 + \frac{1}{100} = 2{,}718\,333\,3\ldots$$

Si $n = 23$, alors $24! = 62\,044\,840\,173\,323\,943\,936\,000$ et les inégalités $s_n < e < s_n + \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1}$ permettent de déterminer les 23 décimales de $e$ calculées par Euler, voir l'équation (1).

Pour obtenir beaucoup de décimales de $e$, il y a des méthodes de calcul encore bien plus rapides.

---

[1] Voir [7], écrit en 1737, publié en 1744. À propos de la « loi » qui dit que le développement en fraction continue de $e$ est infini, Euler écrit « Quae lex esti ex sola observatione est deprehensa, tamen probabile videtur eam in infinitum valere, quod quidem infra certo confirmabitur ». Traduction : « Cette loi se révèle par la simple observation [des premiers termes]. Cependant, il semble probable qu'elle sera valable indéfiniment, ce qui sera certainement confirmé plus tard ».

### Transcendance de $e^{\pi}$ et théorème de Gelfond–Schneider

La transcendance de $e^{\pi}$ résulte de la solution du 7e problème de Hilbert, 7e des 23 problèmes formulés le 8 août 1900 au Congrès international des mathématiciens de Paris. Sa solution est due à Gelfond et Schneider en 1934-1935. Une partie du 7e problème demande si $\alpha^{\beta}$ est toujours transcendant lorsque $\alpha$ est un nombre algébrique différent de 0 et 1, et $\beta$ un nombre irrationnel. La réponse est oui. En particulier, si $\alpha = i$ (un nombre complexe, algébrique puisque $i^2 + 1 = 0$, et $i \neq 0, 1$) et si $\beta = -2i$ (un nombre irrationnel, puisque $-2i$ ne peut pas s'écrire $p/q$ avec $p, q$ entiers), alors [1] $i^{-2i} = e^{\beta\log\alpha} = e^{-2i(i\pi/2)} = e^{\pi}$ est transcendant (la 3e égalité est un peu abusive, puisque $i\pi/2$ est *l'une des valeurs possibles* de $\log i$). Les résultats de Gelfond et Schneider ont été à la source de nombreux résultats ultérieurs ; en revanche, on ne sait toujours pas si $\pi^e$ est transcendant ou non.

Peu après le congrès de Paris, la conférence de Hilbert a paru en allemand puis en traduction anglaise et française. Voici les quelques lignes centrales du chapitre sur le 7e problème qui consiste à montrer que :

> *La puissance $\alpha^{\beta}$ pour une base algébrique $\alpha$ et un exposant algébrique irrationnel $\beta$, comme par exemple le nombre $2^{\sqrt{2}}$ ou $e^{\pi} = i^{-2i}$, représente toujours un nombre transcendant ou pour le moins irrationnel.*
>
> [12]

---

[1] Autre manière de montrer $i^{-2i} = e^{\pi}$ en utilisant la formule d'Euler :

$$i = 0 + i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

donc

$$i^{-2i} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{-2i} = e^{-i^2\pi} = e^{\pi}$$

C'est l'occasion de citer Euler et sa lettre à Goldbach du 3 juin 1746 où il montre que $i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$ et où il termine en écrivant : « Letztens habe gefunden, dass diese expressio $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ einen valorem realem habe, welcher in *fractionibus decimalibus* = 0.2078795763, welches mir merkwürdig zu sein scheinet ». Traduction : « Récemment, j'ai trouvé que cette expression $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ a une valeur réelle, en *fractionibus decimalibus* = 0, 2078795763, ce qui me semble remarquable ».

## Références

[1] Charles Adam et Paul Tannery, éd. *Oeuvres de Descartes – Correspondance II*. Paris : Léopold Cerf, 1898. URL : https://fr.wikisource.org/wiki/%C5%92uvres_de_Descartes/%C3%89dition_Adam_et_Tannery/Tome_2/Texte_entier.

[2] Archimède. *Quadrature of the parabola*. Trad. par T.L. Heath. The works of Archimedes. Cambridge, University Press, 1897, p. 233-252. URL : https://www.aproged.pt/biblioteca/worksofarchimede.pdf.

[3] Jakob Bernoulli. « Questiones nonnullae de usuris cum solutione Problematis de sorte Aleatorum » (1685), p. 427-431. DOI : 10.3931/E-RARA-3584.

[4] Serge Cantat et Stéphane Le Borgne. « Valeurs approchées des racines ». *Images des mathématiques* (2021). URL : https://images.math.cnrs.fr/valeurs-approchees-des-racines/.

[5] Leonard Euler. *Introductio in analysin infinitorum, volume 1*. Euler Archive – All Works. 101. 1748. URL : https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/101.

[6] Leonhard Euler. *Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre*. Euler Archive – All Works. 201. T. 7. 1753, p. 255-270. URL : https://scholarlycommons.pacific.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1200&context=euler-works.

[7] Leonhard Euler. *De fractionibus continuis dissertatio*. Euler Archive – All Works. 71. 1744. URL : https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/71.

[8] Leonhard Euler. *Introduction à l'analyse infinitésimale*. Trad. par J. B. Labey. Paris : Chez Barrois, 1796. URL : https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3884z/f1.image.

[9] Joseph Fourier. *Théorie analytique de la chaleur*. Paris : Chez Firmin Didot, Père et fils, 1822. URL : https://www3.nd.edu/~powers/ame.20231/fourier1822.pdf.

[10] François Gramain. « Les décimales de $\pi$ ». *Images des mathématiques* (2010). URL : https://images.math.cnrs.fr/les-decimales-de-pi/.

[11] Pierre de la Harpe. « Le nombre d'or en mathématique ». *Images des mathématiques* (2009). URL : https://images.math.cnrs.fr/le-nombre-d-or-en-mathematique/.

[12] David Hilbert. *Sur les problèmes futurs des mathématiques*. Compte rendu du deuxième congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900. Gauthier-Villars, 1902, p. 58-114.

[13] Alain Juhel. *Fourier, une incursion en théorie des nombres*. 2023. URL : http://www.mathouriste.eu/Fourier/Fourier_irrat_e.html.

[14] Jean-Pierre Kahane. « Nombres et figures, définitions et énoncés ». *Images des mathématiques* (2017). URL : https://images.math.cnrs.fr/billets/nombres-et-figures-definitions-et-enonces/.

[15] Donald E. Knuth. *The art of computer programming. Volume 1. Fundamental algorithms*. 3e éd. Addison–Wesley, 1997.

[16] Maxim Kontsevich et Don Zagier. *Periods*. Mathematics unlimited – 2001 and beyond. Springer, 2001, p. 771-808.

[17] *L'Encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers*. URL : https://oeis.org/.

[18] Pierre Simon de Laplace. *Exposition du système du monde*. 2e éd. Paris : Duprat, 1798. URL : https://fr.wikisource.org/wiki/Exposition_du_syst%C3%A8me_du_monde.

[19] Gottfried Wilhelm Leibniz. « De geometria recondita et analyst indivisibilium atque infinitorum ». *Acta Eruditorum* 5 (1686), p. 292-300.

[20] MacTutor. *10000 digits of e*. URL : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/e_10000/.

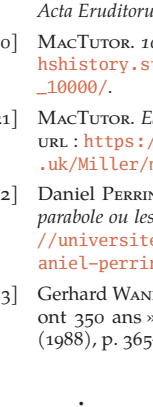
[21] MacTutor. *Earliest uses of symbols for constants*. URL : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Miller/mathsym/constants/.

[22] Daniel Perrin. *Archimède et la quadrature de la parabole ou les cinq sources du tiers*. URL : https://universite-paris-saclay.fr/fr/perso/daniel-perrin/.

[23] Gerhard Wanner. « Les équations différentielles ont 350 ans ». *L'enseignement mathématique* 34 (1988), p. 365-385.

## Remerciements

Merci à Philippe Henry et Gerhard Wanner pour leurs lectures critiques d'une première version de ce texte, pour leurs corrections et pour de nombreuses références historiques. Merci aussi à Laurent Bartholdi pour d'utiles remarques, et à Jean Delcourt pour sa relecture du texte soumis.



**Pierre de la Harpe**
Professeur – Université de Genève

Article édité par Laurent Bartholdi.

---

[1] Référence citée par les experts. Il faut savoir bien lire les textes de ce temps pour relever et comprendre l'importance des nouvelles notations $\int$ (*summae*) et $d$ (*differentiae*) qui arrivent très modestement au milieu de la page 297.

[2] Ce théorème fournit une formule qui permet de calculer la puissance $n$ d'une somme de deux termes. Pour l'exposant 2, la formule $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – notations d'aujourd'hui – est déjà dans Euclide. Pour les exposants entiers $n$ positifs, la formule $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a^k b^{n-k}$ apparaît en Inde, en Chine et en Iran bien avant l'époque moderne. Pascal étudie les coefficients $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ dans un livre important écrit en 1654 (publié en 1665). Vers 1665, Newton généralise la formule qui donne un développement en série de $(a+b)^r$ pour un exposant réel $r$, non nécessairement entier ni positif, et lorsque $|a| > |b|$.